EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

23e JAARGANG 1948

Nr. 5, 6

P. NOORDHOFF N.V. – GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8.00*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 8.00*) zijn ingetekend, betalen *f* 6.75*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1946 t/m 31 Augustus 1947 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

II. Redenen, waarom wisk. in de A-klassen gegeven moet worden.

a) De meeste leerlingen gaan naar de universiteit en krijgen daar een min of meer wijsgerige scholing.
De wisk. wijkt fundamenteel van de andere vakken af, omdat ze de ervaring niet als leidsnoer neemt.
Daarom is wiskunde als wijsgerige voorbereiding noodzakelijk.

b) De wisk. doet een beroep op het verstand en daardoor kan de leerlingen duidelijk gemaakt worden, welke rol het verstand speelt en aan welke beperkingen het onderhevig is.

III. Hoe moet wiskunde gegeven worden.
Stereometrie: Axiomatisch, in 't begin ook nog verschillende stellingen ontleend aan de aanschouwing.
Veel constructies en existentiebewijzen door constructies.
Langzaam vooruitgaan en de geschiedenis als hulpmiddel gebruiken.
Algebra: Getallentheorie: positiesysteem tientallig stelsel; breuken irrationele getal; geschiedenis. Vierkantsvergelijking. Functiebegrip zowel empirische als mathematische.

Daarna stelt de heer *Wielenga* de vraag:

Natuurwetenschappen inplaats van Wiskunde op het Gymnasium A?

Spreken wij over het onderwijs in de exacte vakken op het Gymnasium, dan komen er twee vragen naar voren: 1e. Wat willen wij er eigenlijk mee bereiken? 2e. Hoe kunnen wij dit doel het beste bereiken?

De doelstelling is tweevoudig. Enerzijds heeft de school een culturele taak; zij moet de cultuurgoederen aan de volgende generatie overdragen. Deze culturele vorming mag niet te eenzijdig zijn; er moet belangstelling, openheid en begrip naar verschillende richtingen gevormd worden, wil de mens cultureel kunnen meeleven.

Anderzijds moet de school het denken scholen, d.w.z. een geesteshouding van tuchtvol, critisch en zelfcritisch denken aankweken, waarin men zich steeds rekenschap geeft van alles wat men doet.

Hoe kan men deze doelstellingen het beste bereiken? Van ouds luidde hier op het antwoord: door wiskunde-onderwijs. Reeds bij Plato was de wiskunde een onontbeerlijk element der intellectuele vorming. Een hoofdvoorwaarde voor diepergaande vorming is echter zelfwerkzaamheid en daarvoor is nodig: zelf te *willen* werken. Alle arbeidsprestatie is allereerst afhankelijk van de wilsinzet. Het ge-

vormd worden door het werk is echter een innerlijk proces, dat men niet met uiterlijke middelen kan afdwingen.

Het grote bezwaar tegen het wiskunde-onderwijs aan A's is nu, dat er bij deze lieden veel te weinig belangstelling voor bestaat om vruchtdragend te kunnen zijn. Dit is begrijpelijk en onvermijdelijk wegens de positie van het vak in 5 A en 6 A en door de aard van de leerstof, welke te abstract en te levensvreemd is.

Daarom acht spr. onderwijs in de Natuurwetenschappen eigenlijk geschikter voor de A's. Zij vormen een tussengebied, dat niet al te gecompliceerd en al te emotioneel en tevens niet al te abstract en al te levensvreemd is. Voor de denkscholing zijn ze minstens even geschikt als de wiskunde, omdat men er de synthese in vindt van de experimentele en de mathematische denkwijze, de inductieve en de deductieve methode (mits men er de wiskunde niet geheel uit diminueert). Ook cultureel zijn zij belangrijker, daar de moderne cultuur en het moderne denken veel meer beïnvloed zijn door de resultaten en de denkwijze der natuurwetenschappen, dan door die van de wiskunde. Daar komt nog bij, dat deze vakken op 't moment zo weinig aandacht (tijd) krijgen, dat van haar geen vormende, geen blijvende kracht kan uitgaan.

Indien spr. moest kiezen tussen óf wiskunde óf „natuurwetenschap" onderwijs in 5 A en 6 A, zou hij de voorkeur geven aan een vak „Natuurwetenschap" met een niet te nauw omgeschreven program, zodat de persoonlijke voorkeur van de beschikbare docent zich zou kunnen doen gelden. De wiskunde zou dan met de 4e klas moeten aflopen, met dien verstande, dat door inkrimping van de huidige leerstof een gedeelte van de Stereometrie en der functietheorie in de 4e klas zou gegeven moeten worden.

Hierna komt een groot aantal classici met de inspecteurs Dr v. d. Ent en Dr van Buytenen en oud-inspecteur Dr van IJzeren de vergadering binnen en wordt door Dr Pattist de 3e inleiding gehouden over de stelling:

Natuurwetenschappen naast Wiskunde op het Gymnasium A.

Na een korte inleiding, waarin de spreker enige stellingen poneert: Bij de jeugd, welke het Gymnasium bevolkt is een sterke drang naar weten van de natuur; het gymnasium A is eenzijdig, wanneer zowel de natuurwetenschappelijke methode als die -kennis de leerlingen onthouden wordt.

De spreker wijst op de sterke drang na de 4e klas onder leerlingen om B te gaan; hij zoekt dit in een onbewust verlangen van de jeugd naar beschouwing van de natuur. Volgens zijn mening wordt zij daarin gesteund door maatschappij en wetenschap. Hij wijst op

de plaats, die de exacte vakken innemen bij de studie aan de Rotterd. Hogeschool, de studie in de psychologie, letterkunde, speciaal de klassieke, die in het recht, theologie en geschiedenis en ten slotte bij elk ontwikkeld mens. De eerste beginsels daarvan moeten niet gelegd worden door zelfstudie aan de Academie maar op het gymnasium. Hierdoor worden de uren in de lagere klassen in natuur-, scheikunde en biologie ook meer productief.

Hij bespreekt het bezwaar van de verbreking van de homogeniteit in de A-afdeling. Mocht dit zo zijn, dan weegt de kennis, in de natuurwetensch. vakken verworven daar wel tegen op. Spreker betoogt met citaten van vooraanstaande physici en wiskundigen, dat echter de methoden in die vakken en in de klass. talen veel met elkaar gemeen hebben, speciaal wat betreft het aankweken van logisch denken. Eigen doelstelling en het terrein van studie is verschillend, maar vormen samen: de mens tegenover het leven. Bij de uitvoering van zijn wensen kan, volgens spreker, van de vakken Latijn, Grieks en Nederl. één uur gemist worden. Over het hoe en de onderrichting in de natuurwetenschappen geeft de spreker alleen aan; wat er vermeden moet worden; hij wijst echter nadrukkelijk op de grote waarde van het practisch werken.

De voorzitter bedankt de sprekers en in 't bijzonder de heer Pattist voor zijn zeer interessante voordracht en dan ontstaat er een zeer levendige discussie, waarbij men ten slotte tot de conclusie komt, dat *alle* aanwezigen, ook de classici, het een vooruitgang voor het Gymnasium zouden vinden als aan het programma in 5 Gymn. A en 6 Gymn. A 2 uur Natuurwetenschappen werden toegevoegd. Aan elke school worde de vrijheid gelaten welke der Natuurwetenschappen gedoceerd zal worden en welke onderwerpen daaruit gekozen zullen worden.

Tenslote merkte Inspecteur van Andel op, dat hij, met grote belangstelling de besprekingen had gevolgd en samenvattend sprak hij er zijn voldoening over uit, dat deze gedachten en plannen leven in onderwijskringen. Verder zei hij, dat het bewuste onderwijs algemeen vormend dient te zijn en geen examenstof mag worden en dat er geen vermeerdering van rechten uit mag ontstaan.

Hierna werd de vergadering gesloten.

's-Gravenhage, Kruisbessenstraat 12.

A. KRAMER, *secretaresse.*

SCRIPTA MATHEMATICA.

Het streven van de Uitgeversfirma Teubner te Leipzig om de historici der wiskunde in de gelegenheid te stellen hun gedachten en vondsten uit te wisselen, heeft in het einde van de vorige eeuw aanleiding gegeven tot de oprichting van het tijdschrift Bibliotheca Mathematica. Onder de eminente leiding van den Stockholmer bibliothecaris Gustav Eneström heeft dit tijdschrift gedurende meer dan 25 jaar het kernpunt gevormd van het wiskundighistorisch onderzoek in Europa, en ook wel daarbuiten. Namen als Heiberg, Tannery, Cantor, Steinschneider, Curtze, Björnbo, Woepcke, Hultsch, Karpinski, Heath en nog vele andere blijven daardoor in voortdurende herinnering, wat hun verdiensten voor de geschiedenis der wiskunde betreft.

De eerste wereldoorlog heeft ook deze schone illusie verstoord. Het verbreken der internationale betrekkingen en in het bijzonder de précaire situatie waarin Duitsland kwam te verkeren in deze jaren had tot gevolg dat Bibliotheca Mathematica voorlopig werd gestaakt. Wel zijn nà 1919 pogingen gedaan om met behulp van overzeese betrekkingen de relaties te herstellen, maar de eminente leider Eneström was inmiddels overleden, en alle bemoeiingen in die richting liepen op niets uit.

In de periodieken Isis (leider: George Sarton) en Janus (uitgegeven bij Brill te Leiden, werd echter gestaakt in 1940) verschenen weliswaar nog enkele publicaties op wiskundig-historisch gebied; ook de welbekende „Unterrichtsblätter" mochten zich in een uitstekende reputatie verheugen, terwijl Euclides en het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde ook verschillende artikelen van geschiedkundige aard bevatten. Een speciaal tijdschrift voor de geschiedenis der mathematische wetenschappen ontbrak echter; zo konden b.v. artikelen over de Indische, Chinese en Japanse wiskunde worden gevonden, verspreid over diverse morgenlandse en philologisch georienteerde tijdschriften, maar de beoefenaar van de wiskunde zal slechts zelden in de gelegenheid zijn kennis te nemen van gegevens verspreid over een dergelijk breed terrein. Verheugend is het daarom dat er een tijdschrift bestaat waarin de geschiedenis der wiskunde een buitengewoon belangrijke plaats inneemt, n.l. Scripta Mathematica. Dit Amerikaanse tijdschrift, onder leiding van Jekuthiel Ginsburg, met als „Associate Editors": R. C.

Archibald, E. T. Bell, C. B. Boyer, A. A. Fraenkel, L. C. Karpinski, E. Kasner, M. Kraitchik, G. Loria, W. D. Reeve en L. G. Simons is speciaal gewijd aan onderwerpen uit Philosophie, Geschiedenis en Didactiek der wiskunde; voor het merendeel zijn de bijdragen van historische aard. De redacteuren zijn elk voor zich geleerden met een uitstekende reputatie op historisch gebied en hierdoor wordt het peil van het tijdschrift ten volle gewaarborgd.

Scripta Mathematica [1]) is thans haar 13e jaargang ingetreden; het verschijnt viermaal per jaar, en kost $ 3.— per jaargang, of $ 1.— per aflevering. De eerste aflevering der 13e jaargang bevatte o.a. artikelen over: E. de Jonquières als zeeman en wiskundige (G. Loira), De eerste grondslagencrises der wiskunde (A. A. Fraenkel), Neo-Pythagoreïsche driehoeken (E. Kasner), Wiskunde in „Latin America" (E. Kasner en J. de Cicco), voorts een rubriek „Recreational Mathematics" en een aantal kleinere historische opstellen over diverse onderwerpen; het bevat portretten van E. de Jonquières en C. J. Keyser.

De Nederlandse beoefenaren van de geschiedenis der wiskunde zullen dit tijdschrift vanzelfsprekend reeds kennen; de bijdragen in Scripta Mathemetica zijn echter van een dergelijk groot interesse en actualiteit dat ik iedere beoefenaar der Mathesis zou willen adviseren dit Amerikaanse periodiek regelmatig te lezen. De prijs is voor dit keurig verzorgde tijdschrift zeker niet te hoog en ofschoon mij niet bekend is of bij de uitgevers het voorbeeld van Bibliotheca Mathematica steeds voor ogen zweeft, geloof ik gerust te kunnen zeggen, dat het een waardige opvolger van Eneström's geesteskind is geworden. De Redacteur van Scripta Mathematica ziet, naar hij mij verklaarde, ook gaarne bijdragen van Nederlandse historici voor zijn tijdschrift tegemoet. In elk geval wordt hier de mogelijkheid geboden mede te werken aan een internationale gedachtenwisseling op historisch gebied, een streven, waarbij het nageslacht van de stichters van Nieuw Amsterdam zich zeker niet onbetuigd dienen te laten.

December 1947. M. G. BEUMER.

---

[1]) Scripta Mathematica wordt uitgegeven te New York; redactie en administratie is gevestigd te Yeshiva College, 186th Street and Amsterdam Avenue, New York 33 N.Y.

ENKELE GREPEN UIT DE GESCHIEDENIS DER TRISECTIE

door

M. G. BEUMER.

1. *Inleiding.* „Il faut cependant convenir que ces solutions, „toutes élégantes qu'elles sont, ont une défaut, savoir celui d'em„ployer deux sections coniques, où une seule combinée avec un „cercle eût suffi. Mais doit-on s'attendre qu'une invention, encore „isi voisine de sa naissance, eût déjà atteint la perfection dont elle „était susceptible? Cela serait injuste, on doit tenir compte aux „inventeurs, même du petit nombre de pas qu'ils ont faits en ouvrant „la carrière." Aldus J. F. Montucla betreffende de geschiedenis der hoektrisectie [1]). Maar zo is het met de ontwikkelingsgang van elk probleem.

Op deze plaats willen wij enkele grepen nemen uit de veelbewogen geschiedenis van een beroemd probleem: de trisectie van de hoek, een vraagstuk thans meer dan 2100 jaar oud. Er zijn maar weinig wiskundige werkstukken aan te wijzen die een dergelijke veelbewogen levensloop achter de rug hebben. Het Theorema van Fermat is wellicht het enige probleem dat zoveel sensationele pogingen tot oplossing heeft gekend als de trisectie van de hoek. Het is nauwelijks anderhalve eeuw geleden, n.l. in 1775, dat een beroemd Frans wetenschappelijk lichaam, de „Academie Royale", officieel te kennen gaf, geen oplossingen van het vraagstuk in „Platonische" zin, d.w.z. alleen uitvoerbaar met passer en liniaal, meer in behandeling te zullen nemen [2]). Met onze huidige terminologie uitgedrukt: constructie van $^1/_3\alpha$, waarbij α een gegeven willekeurige hoek is, kan niet exact worden uitgevoerd met passer en liniaal als enige hulpmiddelen; slechts een benaderingsconstructie is mogelijk, en dit is op verschillende manieren te bewijzen.

De bemoeiingen van een aantal beroemde onderzoekers in dit onderwerp: Archimedes, Nicomedes, de drie Arabische Broeders, Descartes, Dürer en Vieta, die elkaar overigens dikwijls de prioriteit betwistten, en wier werk niet altijd geheel origineel is [3]), zijn in meer of mindere mate in wijdere kring bekend

---

[1]) J. F. Montucla, Histoire des mathématiques I, p. 176.

[2]) Histoire de l'Académie Royale 1775, p. 61.

[3]) Over de invloed van Archimedes en de drie Arabische Broeders op Vieta b.v., in verband met de trisectie, zie: Bibliotheca Mathematica [3] 5 (1904), 69—70. (Dit tijdschrift wordt in het vervolg geciteerd met: BM).

geworden, juist omdat de genoemde onderzoekers grote figuren waren, wier levensloop en wier prestaties dus ook ruimer beschreven werden. Maar bezien wij b.v. een bibliographie van 1900, waarin bijna alle titels van boeken en geschriften over „trisectio anguli" zijn opgesomd, dan valt het op dat ook zeer vele minder bekende grootheden over dit onderwerp hebben gewerkt [1]. Overigens behoeft men de jaargangen van bibliographische repertoria als „Revue Semestrielle des publications mathématiques (index letter K^1 21*b*) slechts door te bladeren om een indruk te krijgen hoeveel er nà 1900 nog over de trisectie gewerkt is. Men krijgt dan zelfs de indruk dat het in de oude tijd en de middeleeuwen, maar ook daarna, met de trisectie precies eender gegaan is, als met het Theorema van Pythagoras bij de Grieken, naar men vertelt: een mathematicus werd niet als vakman erkend als hij voor de beroemde stelling, toegeschreven aan den Philosoof van Croton, geen nieuw bewijs gevonden had.

Met recht kon P. Middel de stelling verdedigen dat „de resultaten bereikt bij het zoeken naar een constructie voor de trisectie van de hoek een voldoende vergoeding voor de bestede moeite zijn" [2].

Enkele grepen nu uit dit bibliografisch repertorium zullen hier in historisch aspect behandeld worden.

2. Jordanus Nemorarius. Biografische gegevens:

Jord. Nemorarius was wellicht identiek met den Franciscaner prediker Jord. van Quedlinburg (± 1330—± 1380), of met den Dominicaner Ordens-Generaal Jord. de Saxonia. Volgens P. Duhem was hij afkomstig uit Nemi, en leefde in de 12e eeuw (gestorven 1237?) [3]. Van zijn leven is zo goed als niets bekend. Jordanus speelt een zeer beduidende rol in de geschiedenis der wiskunde en der mechanica [4]. Over de wiskunde

---

[1]) E. Wölffing, Bibliographischer Notiz über die 3- und *n*-teilung des Winkels. Mathem.-Naturwiss. Mitteilungen im Auftr. d. mathem.-naturw. Vereins in Württemberg [2] 2 (1900), 21 ff.; 92 ff.; 4 (1903), 75 ff. Gedeeltelijk opgenomen in: Mathematischer Bücherschatz, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. XVI, 1 (Leipzig 1903), S. 225 ff. van dezelfde auteur.

[2]) P. Middel, De trisectie van de hoek. (Dissertatie Groningen 1906), Stellingen.

[3]) Over de identiteit van Jord. Nemorarius en Jord. de Saxonia vgl. BM [3] **10** (1910), 167; over Jord.'s afkomst uit Nemi, vgl. P. Duhem, Les origines de la Statique I (Paris 1905), chps. V en volg.

[4]) Zie Duhem, noot 3 en b.v. E. J. Dijksterhuis, Val en Worp. (Groningen 1924), blz. 170; ook E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 8. Aufl. (Leipzig 1921), S. 76 ff.

schreef Jordanus: De Triangulis [1]). Dit boek over de meetkunde is als handschrift aanwezig in Bazel, Dresden, Parijs, Londen en Florence [2]). De tekst van het Dresden-manuscript werd gepubliceerd door M. Curtze [3]). De betreffende plaats over de trisectie bevindt zich in Boek 4, Stelling 20 [4]).

3. Giovanni Campanus. Biografische gegevens: Geboren in Novara, leefde in de 13e eeuw. Hij was kapelaan onder Paus Urbanus IV en later Kanunnik in Parijs. Over zijn leven is zo goed als niets bekend. Campanus leverde belangrijke commentaren op de boeken van Euclides die hij op een reis uit Arabië, tezamen met nog andere handschriften, meebracht [5]). In 1482 verscheen in Venetië bij boekdrukker Erhard Ratdolt een uitgave getiteld: „Giovanni Campanus, Praeclarissimus liber elementorum Euclidis perspicasissimi, in artem Geometriae incipit quam felicissimi." Aan het einde staat:

„Opus elementorum Euclidis megarensis [6]) in geometricam artem, in id quoque Campani perspicasissimi commentationes finiunt. Erhardus Ratdolt Augustensis impressor solertissimus Venetiis impressis, Anno Salutis 1482, Octavis Calend. Jun. Lector Vale." Dit folioboek bestaat uit 136 blz., en wordt in de bibliografie over

---

1) Vgl. G. Eneström, Ueber den ursprünglichen Titel der geometrischen Schrift des Jord. Nemorarius BM [3] **13** (1912), 83—84.

2) Bazel: Codex F II 33, Blad 146—150; Dresden: Cod. Db. 86, Bl. 50*a*—61*b*; Parijs: Cod. 7378 A, Fol. 29*r*—36*r* en 7434, Fol. 84*r*—87r; London: British Museum Harl. 625 Fol. 123*r*—130*r* en Sloane Fol. 80*r*—92*r*; Florence: verschillende hss. zie hierover: A. A. Björnbo, Die mathem. S. Marco—Handschriften in Florenz. BM [3] **12** (1912), 193; 202; 209; 214; 219.

3) M. Curtze, Jordani Nemorarii de triangulis libri quatuor. Mitt. des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn VI (1887).

4) Over de prioriteit van Jordanus ten aanzien van de drie Broeders Mûsâ, vgl. BM [3] **6** (1905), 214.

5) Biografie: G. Libri, Histoire des sc. mathém. en Italie (Paris 1838—41), II, p. 48; G. Tiraboschi, Storia della letteratura Italiana (Firenze 1805—13), IV, p. 154—160; voorts: Poggendorff, I (1863), Kol. 367; Ch. G. Jöcher, Allg. Gelehrten Lexikon (Leipzig 1750—51); fortgesetzt von H. W. Rotermund (1784—87); C. S. Peirce, Campanus. Science (New York), **13**, 2 (1901), 809—811; ook: BM [2] **2** (1888), 27.

Over Campanus als uitgever en commentator van oude wiskundige werken, zie: A. A. Björnbo, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. XIV (Leipzig 1902), S. 152 ff. en: BM [3] **6** (1905), 396.

6) Bedoeld is hier: Euclides van Alexandrië. De verwarring met Euclides van Megara (450?—374 v. Chr.), leerling van Socrates, stichter van de Megariaansche school en auteur van verschillende werken waarvan alleen de titels zijn overgeleverd, komt veelvuldig voor ten tijde van Campanus.

die tijd duidelijk vermeld [1]). Van dit werk is een klein gedeelte van de oplage blijkbaar anders gedrukt; van de bedoelde exemplaren waren de eerste vellen druks afwijkend van die der gewone editie [2]).

De commentaren van Campanus werden gedrukt in 1482 (zie boven), en 1491 [3]); tezamen met de commentaren van Bartolomeo Zamberti in 1505 [4]), 1516, 1537, 1546 en 1558 [5]).

In een gedrukte aankondiging van de 1482-er Ratdolt-uitgave staat de opmerking: „Imprimetur Venetiis per Erhardum Ratdolt de Augusta et Uldaricum Krafftshofen de Nuremberga." Het staat natuurlijk niet vast hoe deze laatstgenoemde in de uitgave geinteresseerd was: als drukker, als corrector of financier. Kraftshofen is een gehucht in de nabijheid van Neurenberg [6]).

Curtze onderzocht een twintigtal handschriften van de Campanus-Euclidesuitgave zonder iets over trisectie te vinden, en zover bekend komt dit voor het eerst in de Ratdolt-uitgave van 1482 [7]).

De betreffende verhandeling over de trisectie van de hoek is in haar geheel opnieuw afgedrukt door A. G. Kästner in zijn bekend compilatiewerk [8]). Campanus wist evenals Jord. Nemorarius dat de conchoide op circulaire grondslag gebruikt kon worden voor de trisectie van de hoek [9]).

---

[1]) Zie b.v. F. W. A. Murhard, Bibliotheca Mathematica (Lipsiae 1797—1805), vol. II, S. 5 (geciteerd met: Murhard).

[2]) In de nalatenschap van den beroemden Thorner astronoom Nicolaus Coppernicus is een dergelijk exemplaar gevonden. De titel luidde: „Praeclarissimum opus elementorum Euclidis megarensis una cum commentis perspicassimi in artem geometriae incipit feliciter". Zie: L. Prowe, Nicolaus Coppernicus I, 2, (Berlin 1883), S. 413.

[3]) De veelzijdige Murhard heeft deze uitgave nooit in handen kunnen krijgen (II, S. 6). Een ex. ervan was in het bezit van G. Libri, zie: Catalogue of the mathematical etc. portion of the ... library of G. Libri I (London 1861), p. 284, Nr. 2521.

[4]) Zamberti was secretaris van de Venetiaanse senaat; over hem, zie: Bald. Boncompagni, Bullett. di bibliogr. e di storia delle sc. matem. e fisiche VII (1874), 159—161. De uitgave van 1505 is vermeld bij Murhard, II, S. 6.

[5]) 1516: evenals die van 1505, uitgegeven „in officina Henr. Stephani". Deze 1516er ed. vermeld bij Murhard II, S. 7. 1537, 1546 en 1558 alle uitgegeven: „Basiliae, apud Joh. Hervagium"; Murhard II, S. 2—3.

[6]) BM [3] **1** (1900), 507, „Kurze Mitteilung" van M. Curtze.

[7]) M. Curtze, Centralblatt für Bibliothekwesen **16** (1899), 262; BM [3] **4** (1903), 397—98, vgl. voorts ook BM [3] **10** (1910), 262; 277.

[8]) A. G. Kästner, Geometrische Abhandlungen 1. Samml. (der mathem. Anfangsgründe 1. Theils, 3. Abthl.) (Göttingen 1790) S. 236 ff.

[9]) Zie hierover: S. Günther, War die Zykloide bereits im 16. Jahrh. bekannt? BM [2] **1** (1887), 8.

4. Carlo Renaldini. Biografische gegevens:

Geboren 30-12-1615, gestorven 18-7-1698, beide te Ancona. Hij was eerst ingenieur in het Pauselijk leger, werd in 1648 professor in de philosophie aan de universiteit te Pisa, en daarna prof. in wiskunde en philosophie van 1667—1698; toen trok hij zich in Ancona terug. Hij was lid van de Accademia del Cimento te Florence vanaf 1657 [1]).

Van zijn hand zijn werken bekend op het gebied der wiskunde (Opus Algebraicum 1644), philosophie (Philosophia Naturalis 1694) en natuurkunde (Experienze .... per conoscere se il calore si diffonda sfericamente en: Some experiments showing the difference of ice made without air, ... from that .... with air 1671), hetgeen zijn veelzijdigheid in een juist licht stelt.

Over de tri- en multisectie van de hoek schreef Renaldini: „De resolutione et compositione mathematica." Patavii 1668, pag. 367: „Auctoris methodus ad generalem polygonorum omnium ordinatum inscriptionem in circulo." [2])

Murhard vermeldt in zijn bibliografie een in 1700 door Rud. Chr. Wagner gepubliceerd commentaar op de methode van Renaldini, getiteld: „Examen methodi Renaldininae ad polygonorum omnium ordinatum inscriptionem generalem in circulo eruditorum examini subjicient praef. M. Rud. Christianus Wagnerus et respond. Joan. Christoph. Wahrendorff Hannoveranus. Typis Georg. Wolfgangi Heimmii, Acad. typ. 4°, 20 S. m. Tafel en Fign." [3]) In Kästner's „Geometrische Abhandlungen" komt ook een verhandeling over Renaldini's multisectie voor: „Abhandlung 40: Renaldin's allgemeine unrichtige Regel jedes ordentliche Vieleck im Kreise zu beschreiben." [4])

5. René François—Walter de Sluse. Biografische gegevens: De Sluse werd geboren te Visé in 1622, studeerde eerst in Luik, daarna aan de Leuvense universiteit, tenslotte te Rome, waar hij in 1643 promoveerde tot doctor in de Rechten. Hij bracht nog 10 jaar in Italië door, deed veel aan de studie der wiskunde, vooral de werken van Cavalieri en Torricelli (1608–1647); tenslotte in 1653 te Luik teruggekeerd, werd hij kapittelheer van de

---

[1]) Tiraboschi, op. cit.; Poggendorff II (1863), Kol. 604.

[2]) Zie hierover: G. Eneström, BM [3] 7 (1906), 297—98; 8 (1907), 91 (Kleine Mitteilungen).

[3]) Murhard II, S. 102.

[4]) A. G. Kästner, Geometr. Abhandl. 1. Samml. (zie noot 8, blz. 233), S. 266—281.

Kathedraal, en bekleedde belangrijke administratieve posten in overheidsdienst. Slusius stierf in 1685 te Luik. De levensloop van Slusius is, in tegenstelling met de voorafgaande geleerden, goed bekend en literatuur is er in overvloedige mate voorhanden. Een Belgisch biografisch woordenboek geeft liefst 15 bronvermeldingen [1].

De Sluse's correspondentie met zijn tijdgenoten (Pascal, Huygens, Oldenburg, M.-A. Ricci, Wallis) is beroemd en werd, voor zover zij bewaard gebleven is, in haar geheel gepubliceerd [2].

De Sluse was een ontwikkeld en veelzijdig man: hij interesseerde zich voor mechanica en astronomie, beoefende geschiedenis en kende Grieks en enkele Oosterse talen; hij stond bij zijn tijdgenoten in hoog aanzien, getuige ook zijn benoeming tot „Member of the Royal Society of London" in 1674 [3].

Op grond van dit alles en gezien het grote aantal publicaties over De Sluse zou men mogen verwachten dat de détails van zijn werk bekend zijn, maar dat dit zelfs bij historici van professie niet het geval is blijkt uit het volgende. In 1892 vermeldde Moritz Cantor in zijn beroemde standaardwerk dat Slusius de trisectie van de hoek uitvoerde door middel van cirkel „und irgend einen Kegelschnitt" [4]. Werkelijk verwonderlijk is in dit verband dus dat Wölffing in 1900 in zijn (reeds vermelde) repertorium de werkzaamheid van den Belgischen wiskundige niet noemt, hoewel de geleerde Duitse compilator over een schier onbeperkte belezenheid bleek te beschikken, zoals trouwens ook duidelijk in de reeds geciteerde bibliografie te zien is.

Slusius' verhandeling over de trisectie komt voor in zijn „Mesolabum" [5]. De eerste druk van dit werkje verscheen in 1659 te Luik onder de titel: „Mesolabum, seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et ellipsum, vel hyperbolam infinitis modis exhibitae: Accedit Problematum quorumlibet soli-

---

[1]) Biographie Nationale publiée par l'Académie Royale des Sciences etc. de Belgique (Bruxelles 1914—20), t. 22, Kol. 731.

[2]) C. le Paige, Correspondance de R. F. de Sluse, publiée pour la première fois et précédée d'une introduction. Bullett di bibliogr. e di storia delle sc. matem. e fisiche XVII (Rome 1884).

[3]) Vgl. b.v. de brieven van Isaac Newton en John Wallis aan Collins, gepubliceerd door S. J. Rigaud: Correspondence of scientific men of the 17th century, II (Oxford 1841) pp. 322; 489; 529 en sparsim.

[4]) Vorlesungen über Gesch. d. Mathem II (Leipzig 1892), S. 737.

[5]) Een Mesolabium (de naam stamt van Pappos van Alexandrië) is een apparaatje gebruikelijk voor het construeren van twee middelevenredigen tussen twee rechten.

dorum effectio, Leodii Eb., van Milst. 1659, 4°" [1]). De tekst van deze editie vormt blz. 1—46 van de tweede druk, waarvan de titel luidt: „Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et per infinitas hyperbolas, vel ellipses et per quamlibet exhibitae, Ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curvas, Accessit pars altera de analysi et miscellanea. Leodii Eb., G. H. Streel, 1668, 4°, 182 blz."

Zoals de titel reeds uitdrukt bevat deze tweede druk veel meer dan de eerste. Andere uitgaven van dit werkje dan de beide bovengenoemde zijn niet bekend. Ook zijn nooit andere geschriften van De Sluse in druk uitgegeven; handschriften van onuitgegeven werken berusten bij de Bibliothèque Nationale te Parijs.

De behandeling van de trisectie is te vinden op blz. 36 van de 2e druk: „Propositio 13: Angulum datum secare trisariam etc." en blz. 41: „Prop. 15: Angulum datum secare trisariam per circulum et parabolam."

Een tijdgenoot van Slusius, de Engelse geleerde Thomas Strode (1642—1688) schreef over deze methode aan John Collins (1625—1683) op 11 Juli 1672: „I have never seen Slusius' mesolabe, but as I apprehend him by the Philosophical Transactions [2]), he shews the resolution of cubic and biquadratic equations by conical sections as M. Des Cartes hath done, which way, I must truly confess, I never fancied" [3]).

---

1) „On ne cite que deux exemplaires de cette édition, dont un à la Bibl. Nationale de Paris". Biogr. Nationale de Belgique t. 22, Kol. 731. Over deze editie deelde University of Pennsylvania, Philadelphia Pa. schrijver dezes mede, dat in de U.S.A. geen enkele openbare bibliotheek een ex. van dit uitermate zeldzame werkje bezit.

2) De bedoelde recensie stond in Philosophical Transactions, vol. III, p. 903.

3) S. J. Rigaud, Opus cit. vol. II, p. 442.

VERSCHEIDENHEDEN

door

PROF. DR O. BOTTEMA.

XXII. *Over configuraties* (9_3).

Gelijk bekend verstaat men onder een configuratie (n_m) in het platte vlak een figuur, die n punten en n rechten bevat, zodanig dat door elk punt m der rechten gaan en op elke rechte m der punten liggen. Voor $m < 3$ zijn deze figuren triviaal; voor $m = 3$ zijn zij niet mogelijk voor $n \leq 7$, terwijl de configuratie (8_3) niet reëel mogelijk is. Er blijken *drie* typen van configuraties (9_3) te bestaan (zie b.v. Barrau, *Bijdragen tot de theorie der configuraties*, diss. Amsterdam 1907; Hilbert, *Anschauliche Geometrie* (Berlin 1932), pg. 91—99). Een dezer is de figuur van de stelling van Pappus (fig. 1), de beide andere, die minder belangrijk zijn,

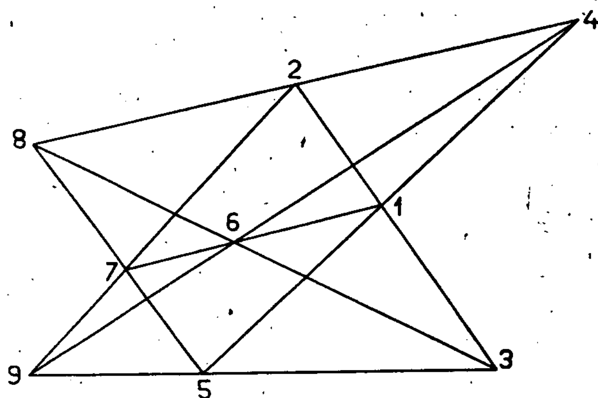


Fig. 1.

vindt men weergegeven in de figuren 2 en 3. Wij willen een enkele opmerking maken over de eerste dezer twee configuraties.

Men kan haar opgebouwd denken uit drie driehoeken $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ en $A_3B_3C_3$, die zo gelegen zijn dat de tweede ingeschreven is in de eerste, de derde in de tweede en tenslotte de eerste op zijn beurt in de derde. De configuraties behoren uiteraard tot het gebied der projectieve meetkunde; voor de voorstelling doet men goed een affine of metrische stylering te nemen. In de figuur 2 is dat reeds

gebeurd. Voor driehoek $A_1B_1C_1$ is een gelijkzijdige driehoek gekozen (een omstandigheid, die overigens van geen belang is voor het vervolg) en de hoekpunten van $A_2B_2C_2$ zijn de middens van de zijden van de eerste driehoek. Wij vragen ons af in welke gelijke

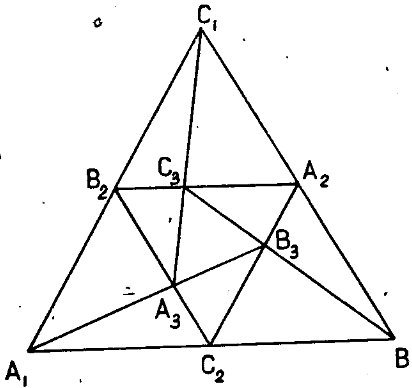


Fig. 2.

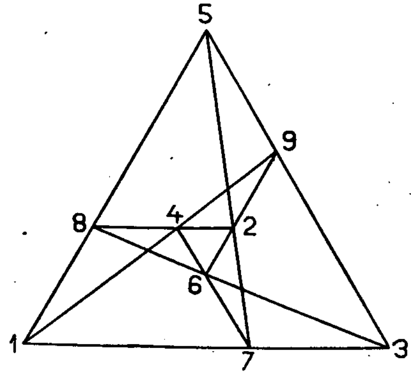


Fig. 3.

verhouding men de zijden van $A_2B_2C_2$ moet verdelen om de configuratie te voltooien. Wij nemen dus

$$\frac{A_2C_3}{C_3B_2} = \frac{B_2A_3}{A_3C_2} = \frac{C_2B_3}{B_3A_2} = x$$

en stellen de eis dat A_3B_3 door A_1 gaat; op grond van de drietallige symmetrie gaat dan B_3C_3 door B_1 en C_3A_3 door C_1. Is S het snijpunt van A_3B_3 met B_1C_1, dan is

$$\frac{B_1S}{SC_1} = \frac{C_2A_3}{A_3B_2} = \frac{1}{x}, \text{ dus } \frac{B_1S}{SA_2} = \frac{2}{x-1}.$$

De stelling van Menelaus, toegepast op $\triangle A_2C_2B_1$ met A_3B_3 als snijlijn, geeft

$$\frac{B_1S}{SA_2} \cdot \frac{A_2B_3}{B_3C_2} \cdot \frac{C_2A_1}{A_1B_1} = -1,$$

dus $x^2 - x - 1 = 0$, waaruit volgt, dat A_2B_2, en ook B_2C_2 en C_2A_2 verdeeld moeten worden in uiterste en middelste reden; hiermede is een nieuw voorbeeld van de *gulden snede* verkregen. Stelt men

$$\frac{A_1A_3}{A_3B_3} = \frac{B_1B_3}{B_3C_3} = \frac{C_1C_3}{C_3A_3} = y$$

en past men op de driehoek $B_1C_1C_3$ met de transversaal A_3B_3 weer de stelling van Menelaus toe, dan komt er

$$\frac{B_1S}{SC_1} \cdot \frac{C_1A_3}{A_3C_3} \cdot \frac{C_3B_3}{B_3B_1} = -1 \text{ of } \frac{1}{x} \cdot \frac{1+y}{1} \cdot \frac{1}{y} = 1,$$

dus $y = \frac{1}{x - 1}$ en daar $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ vindt men ook $y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, zodat ook op de zijden van driehoek $A_3B_3C_3$ de gulden snede blijkt voor te komen. Op grond van de afgeleide eigenschappen is de (metrisch gespecialiseerde) configuratie gemakkelijk te construeren.

Wij maken nog een opmerking over een andere specialisatie van de figuur; weer kiezen wij drie gelijkzijdige driehoeken, de hoekpunten $A_2B_2C_2$ verdelen de zijden van $A_1B_1C_1$ in een bepaalde

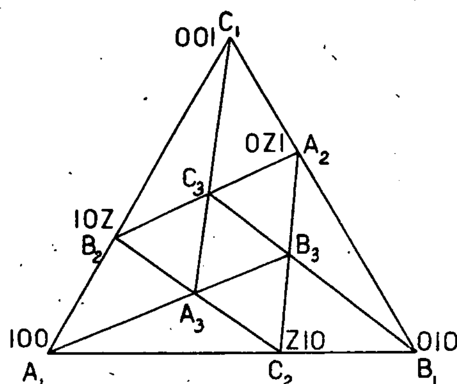


Fig. 4.

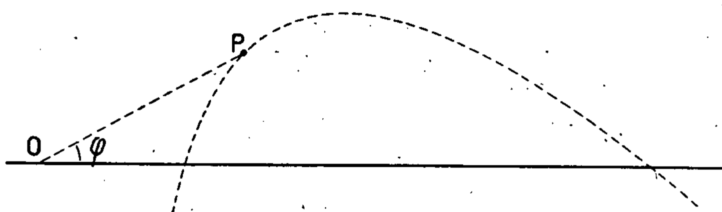
verhouding, zeg z, en A_3, B_3 en C_3 verdelen de zijden van $A_2B_2C_2$ in dezelfde verhouding (fig. 4). Om z uit te rekenen willen wij deze maal homogene barycentrische coördinaten gebruiken. Als de coördinaten van A_1, B_1, C_1 resp. zijn (100), (010) en (001), dan zijn die van A_2, B_2 en C_2 resp. ($0z1$, ($10z$) en ($z10$) en die van $A_3B_3C_3$ resp. ($2z$, 1, z^2), (z^2, $2z$, 1) en (1, z^2, $2z$). Hieruit volgt dat A_1, A_3 en B_3 collineair zijn als

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2z & 1 & z^2 \\ z^2 & 2z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

zodat $z^3 = \frac{1}{2}$. Wij vinden dus het eenvoudige resultaat dat de verhoudingen $\frac{A_1B_2}{A_2C_1}$, $\frac{C_1B_2}{B_2A_1}$ etc. gelijk zijn aan $\sqrt[3]{2}$ (of 1,26). De constructie is dus dezelfde als die bij *de verdubbeling van de kubus* en dit (*Delische*) constructieprobleem kan, zoals bekend, niet met passer en lineaal worden verricht.

XXIII. *De gebroken kwadratische functie.*

Zonder in te gaan op de bedoelingen van een behandeling van de gebroken kwadratische functie (wier aantrekkelijkheid door niemand zal worden ontkend, maar die toch een ondergeschikte positie zal moeten behouden) willen wij opmerken, dat men in de wiskunde deze functie uitermate zelden tegen komt. Een misschien niet al te gekunsteld voorbeeld, dat het voordeel heeft alle verschillende gevallen te omvatten, is het volgende. *Een stoffelijk punt beweegt zich in het zwaarteveld en ondervindt daarenboven een constante horizontale kracht. Onder welke hoek met de horizon wordt het door een waarnemer gezien?* Zij g de versnelling van de zwaartekracht, a de versnelling door de horizontale kracht veroor-



zaakt. Kiest men (fig. 1) de plaats van de waarnemer als oorsprong, is voor $t = 0$ het stoffelijk punt in (p, q) en zijn de componenten van de beginsnelheid v en w, dan is

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\,{}^1\!/_2\, gt^2 + wt + q}{{}^1\!/_2\, at^2 + vt + p}.$$

In het rechterlid staat inderdaad de meest algemene gebroken kwadratische functie.

De verschillende gevallen, die zich bij de grafiek van de functie kunnen voordoen, komen overeen met ligging van O ten opzichte van de door het stoffelijke punt beschreven kromme, die in het algemeen een parabool is. De volgende bijzonderheden behoeven geen toelichting. De grafiek heeft géén, één of twee verticale asymptoten al naar gelang de verticaal door O de baanparabool niet snijdt, raakt of in twee punten snijdt. De functie heeft twee, één of geen uiterste waarden als O buiten, op of binnen de parabool ligt. De functie is een gebroken lineaire functie als de baankromme een rechte lijn is. Is $a = 0$ en dus de baankromme een parabool met verticale as, dan is de teller een kwadratische, de noemer een lineaire functie van t en dit merkwaardige geval, waarbij de grafiek een hyperbool met een verticale en een scheve asymptoot is, vindt hier dus een eenvoudige illustratie.

XXIV. *Aldous Huxley en de stelling van Pythagoras.*

De in brillante stijl geschreven romans en essays van de doordringende psycholoog Aldous Huxley getuigen niet slechts van een ongemeen scherp waarnemingsvermogen voor mensen en toestanden, van een hartstocht voor waarheid en waarachtigheid, van een belangstelling voor philosophische en maatschappelijke problemen en van een kritische zin die haar weerslag vindt in menig satiriek betoog, maar ook van een zeldzame intelligentie. Hoe men ook staat ten opzichte van de denkbeelden, die de auteur uit, oppervlakkigheid of dilettantisme kan men hem zeker niet verwijten. Het zij vergund hier aandacht te vragen voor het verhaal *Young Archimedes,* dat gij vindt in die bewonderenswaardige bundel *The Gioconda Smile* en dat de aangrijpende geschiedenis bevat van een wiskundig wonderkind, dat door de ijdelheid en het onverstand van zijn zogenaamde beschermvrouw ten onder gaat. Het is hier niet de plaats om deze zuivere vertelling, die zo fijn geestig inzet en zo weemoedig uitklinkt (voor sentimentaliteit behoeft gij bij deze schrijver niet te vrezen) uitvoerig te bespreken. Wij vestigen alleen de aandacht op een technisch detail, dat kenmerkend is voor de wijze waarop Huxley in zijn werk personen en situaties uitbeeldt. Menig ander auteur zou zich beperkt hebben tot de mededeling dat de jonge Guido blijk gaf van buitengewone wiskundige gaven, hier worden wij daarvan rechtstreeks doordrongen, doordat wij de eenvoudige en onontwikkelde jongen spelenderwijze een meetkundig probleem zien vinden. Dat Huxley daarvoor de stelling van Pythagoras kiest en niet een minder algemeen bekend theorema bewijst dat hij de psychologie van de algemene lezer kent en weet dat een al te technische passage niet gelezen zou worden. De bedoelde regels, een waarlijk boeiend en klaar verslag, volledig en volmaakt leesbaar en getuigend, zou men welhaast zeggen, van het genoegen dat de schrijver persoonlijk in de aangelegenheid had, volgt hier [1]).

"A minute later Guido finished both his diagrams. 'There!' he said triumphantly, and straightened himself up to look at them. 'Now I'll explain'.

And he proceeded to prove the theorem of Pythagoras- not in Euclid's way, but by the simpler and more satisfying method, which was, in all probability, employed by Pythagoras himself. He had

---

[1]) Aldous Huxley, The Gioconda Smile (The Albatross Modern Continental Library, vol. 2, Hamburg, Paris, Milano 1932, pg. 230).

drawn a square and dissected it, by a pair of crossed perpendiculars, into two squares and two equal rectangles. The equal rectangles he divided up by their diagonals into four equal right-angled triangles. The two squares are then seen to be the squares on the two sides of any one of these triangles other than the hypothenuse. So much for the first diagram. In the next he took the four right-angled triangles into which the rectangles had been divided and rearranged them round the original square so that their right angles filled the corners of the square, the hypotenuses looked inward, and the greater and less sides of the triangles were in continuation along the sides of the square (which are each equal to the sum of the sides). In this way the original square is redissected into four right-angled triangles and the square on the hypotenuse. The four triangles are equal to the two rectangles of the original dissection. Therefore the square on the hypotenuse is equal to the sum of the two squares — the squares on the other two sides — into which, with the rectangles, the original square was first dissected.

In very untechnical language, but clearly and with a relentless logic, Guido expounded his proof."

VERBETERING.

In de ledenlijst blz. 139 moet staan:
J. T. Groenman.
Op blz. 140 invoegen:
J. J. van der Kreek Gorinchem Grote Haarse kade 17.

NIET GELUKKIG.

Het eerste vraagstuk vóor Stelkunde, opgegeven op het eind-examen der gymnasia in 1948, luidt:

$$\text{Gegeven: } f(x) = \frac{x^2 - (a+3)x + a - 1}{x - 4}.$$

a. Toon aan, dat de grafische voorstelling van deze functie, voor elke reële waarde van a, de X-as in twee punten snijdt.

b. Voor welke waarden van a heeft de functie twee uiterste waarden?

Voor $a = 1$ wordt

$$f(x) = \frac{x(x-4)}{x-4};$$

de graphische voorstelling bestaat uit de rechte lijn $y = x$ met uitzondering van het punt (4, 4) en heeft dus met de X-as alleen den oorsprong gemeen. Het sub a gestelde is dus onjuist.

Het tweede vraagstuk luidt:

Bepaal alle reële waarden van a, die de eigenschap bezitten, dat de functie

$$\varphi(x) = a^{-x^2+4x-6}$$

gelijk aan 64 is, als x één der waarden is, waarvoor de functie

$$f(x) = {}^x\log\,(x^2 - 4x + 6)$$

gelijk is aan 1.

Bepaal de grootte en de uiterste waarde van $\varphi(x)$, als a het kleinste positieve getal is, dat de boven aangegeven eigenschap bezit.

Bereken $f(\sqrt{3})$ met de logarithmentafel.

Wat bedoeld wordt met „de grootte" in alinea 2 is niet duidelijk.

Het derde vraagstuk luidt:

Van een oneindig voortloopende convergente meetkundige reeks is de som S ($\neq 0$).

De reeks, gevormd door de harmonische gemiddelden van elk paar opeenvolgende termen, heeft de som $\frac{1}{2}$S.

Bepaal de reden van de reeks.

Men interpoleert tussen elk tweetal termen van de oorspronkelijke reeks k termen, die met dit tweetal weer een meetkundige reeks vormen.

Welke waarde moet k minstens hebben, opdat de som van deze nieuwe reeks minstens 4S is?

Opmerking: Het harmonisch gemiddelde van de getallen a en b is $\frac{2ab}{a+b}$.

De reden van de oorspronkelijke reeks blijkt te zijn $r = \frac{1}{3}$. Noemt men den eersten term t_1 en de reden der nieuwe reeks r', dan krijgt men ter beantwoording van de laatste vraag deze ongelijkheidsopgave op te lossen:

$$\frac{t_1}{1-r'} \geqq 4 \cdot \frac{t_1}{1-r}.$$

Naar gelang t_1 positief of negatief is wordt de oplossing

$$k \geqq \frac{\log 3}{\log 1,2} - 1 \quad \text{of} \quad k \leqq \frac{\log 3}{\log 1,2} - 1.$$

Daar omtrent het al of niet positief zijn van den eersten term niets gegeven is, worden de candidaten door de redactie van de laatste vraag in de verleiding gebracht, een ernstige fout te begaan bij de oplossing eener ongelijkheidsopgave.

J. H. S.

BOEKBESPREKING.

Dr C. H. van Os, Getal en Kosmos. Wiskunde en Wereldbeschouwing. Wetenschappelijk-Wijsgerige Bibliotheek. Deel I. - J. M. Meulenhoff, Amsterdam. 1947. 278 blz. geb. *f* 7.90.

Daar dit boek het eerste deel vormt van een reeks van werken, die met een zeer bepaald doel is opgezet, ligt het voor de hand, de bespreking in te leiden met enkele mededelingen over dien opzet. De Wetenschappelijk-Wijsgerige Bibliotheek dankt haar ontstaan aan de overtuiging van de Redactie — Dr A. de Froe, Dr W. Gs. Hellinga en Dr H. Groot — dat er nog veel hapert aan de wijze, waarop wetenschappelijke inzichten in het algemene culturele leven worden verspreid en opgenomen. In de actieve beoefening der wetenschap heerst het specialisme, dat weliswaar om practische redenen onvermijdelijk is, maar dat grote geestelijke gevaren in zich bergt èn voor de specialisten zelf èn voor de algemene beschaving van de maatschappij. Voor de eersten, omdat het zo gemakkelijk blind maakt voor de waarde van anders gerichte onderzoekingen en denkwijzen; voor de laatste, omdat het specialisme het hoe langer hoe moeilijker maakt, den vooruitgang der wetenschap aan ieder die mee wil leven met zijn tijd, ten goede te doen komen. Het gaat er, kort gezegd, om, hoe men den leek — en men houde daarbij in het oog, dat iedere wetenschappelijke werker, hoe groot hij ook op zijn eigen gebied moge zijn, evengoed leek is ten aanzien van andere gebieden van wetenschap als de beoefenaars daarvan ten opzichte van het zijne en iedere cultureel belangstellende die geen enkele wetenschap met zelfstandige bijdragen verrijkt, op beide — zal laten delen in de vruchten van het wetenschappelijk onderzoek.

Men heeft al langs verschillende wegen getracht, dit doel te bereiken, maar het valt niet te ontkennen, dat de toegepaste middelen vaak schadelijker zijn geweest dan het ontbreken van iedere voorlichting had kunnen zijn. Zogenaamd populair-wetenschappelijke litteratuur, die de pretentie had, met omzeiling van essentiële moeilijkheden (b.v. door over moderne natuurkunde te handelen met vermijding van alles wat ook maar zweemde naar een wiskundige redenering of naar wiskundig tekenschrift) den lezer toch enig inzicht bij te brengen of die er meer op uit scheen, hem te

verbluffen dan hem te onderrichten, heeft meer kwaad dan goed gedaan en het woord populair heeft daardoor niet ten onrechte een zo bedenkelijken klank gekregen, dat men het voor beter verantwoorde pogingen om het gestelde probleem op te lossen helemaal niet meer kan gebruiken. De fout van de in dergelijke werken veelal toegepaste methode lag bovendien hierin, dat de schrijver zich gewoonlijk ten doel stelde, den lezer vooral een indruk te geven van de allernieuwste resultaten, die het wetenschappelijk onderzoek op het betrokken gebied had opgeleverd, inplaats van hem te leren denken op de wijze, waarop in het behandelde vak gedacht wordt, hem in te leiden in den zin en de problematiek ervan. Dat streven veroordeelde het gehele genre: men kan iemand nu eenmaal niet in enkele tientallen bladzijden een werkelijk inzicht bijbrengen in wat de wetenschap na jarenlange inspanning van haar beste dienaren zojuist met moeite tot stand heeft gebracht. Wie dat toch tracht te doen onderschat het kritisch vermogen van zijn lezers en, waar dit zelf te kort schiet, verleidt hij hem er toe, met een illusie van weten genoegen te nemen.

Al deze en dergelijke fouten nu wil de Redactie van de Wetenschappelijk-Wijsgerige Bibliotheek vermijden. Zij wil de lezers, die zij zich denkt als intellectueel belangstellenden, maar van wie ze geen dieper gaande concrete kennis op enig gebied verwacht dan het gemeenschappelijk bezit van allen, die een Gymnasium of H.B.S. doorlopen hebben, geacht kan worden te zijn, op een wetenschappelijk verantwoorde wijze (d.w.z. van de grondslagen af rustig opbouwend, rekenschap gevend van de juiste betekenis der gebruikte termen en verantwoording afleggend van iedere getrokken conclusie) zover in verschillende wetenschappen inleiden, dat zij een duidelijk besef zullen hebben ontvangen van zin, doel en methode daarvan, dat zij als het ware vertrouwd zullen zijn geworden met het denkklimaat, waarin zich haar beoefening afspeelt. Met de jongste ontwikkeling van het vak zullen zij dan niet op de hoogte zijn, maar ze zullen iets ontvangen hebben, dat belangrijker is dan een kennis, die toch voornamelijk slechts op napraten berust en het zal hun waardering voor een hun tot dusver onbekend facet van het denken slechts kunnen verhogen.

Wanneer de Redactie er speciaal werk van heeft gemaakt om de reeks te openen met een werk, waarin haar bedoelingen (die zich natuurlijk niet bij ieder onderwerp even gemakkelijk en niet steeds op dezelfde wijze laten verwezenlijken) zo duidelijk en overtuigend mogelijk tot uiting zouden komen, dan heeft ze een wel zeer gelukkigen greep gedaan door het boek van Prof. van Os als eerste

nummer te laten verschijnen. Dit boek is namelijk wel een voortreffelijk specimen van het beoogde genre. Met volkomen helderheid geschreven, daardoor voor wie rustig lezen wil ongetwijfeld overal begrijpelijk, elementair genoeg om aan te sluiten aan wat iedereen wel weet en toch voldoend diep doordringend om den op ander gebied wetenschappelijk gevormden en daardoor ten aanzien van een betoog veeleisend geworden lezer te bevredigen, verduidelijkt het de bedoeling, die der Redactie voor ogen heeft gestaan, doordat ze haar vervult.

Het centrale motief van het boek is het Getal in zijn kosmische betekenis, die, door de Pythagoraeërs in een ontzagwekkend divinatie voorzien, door de ontwikkeling van de nieuwste natuurwetenschap steeds duidelijker wordt bevestigd. Van dit centrum uit worden telkens wegen gewezen, maar niet doorlopen, die naar dieper liggende of verwante gebieden leiden, naar de moderne wis- en natuurkunde, de natuurfilosofie, de kentheorie, de metaphysica, de mystiek. De eenvoud in woordenkeuze en betoogtrant, waarmee dit alles geschiedt, verraadt een volkomen beheersing van de wijdvertakte materie. Wanneer de Redactie erin mocht slagen, de volgende nummers van de reeks op een peil te houden, dat niet te ver beneden het boek van Prof. van Os ligt, is het succes van haar onderneming, althans in ideëlen zin, gewaarborgd.

E. J. DIJKSTERHUIS.

J. J. Poortman, Repertorium der Nederlandse Wijsbegeerte. Wereldbibliotheek N.V., Amsterdam—Antwerpen, 1948. 404 blz.

Dit is in de eerste plaats een onmisbaar boek voor ieder, die zich meer dan oppervlakkig met de studie der wijsbegeerte bezighoudt. Binnen de — zeer ruime — grenzen, die de schrijver zich heeft gesteld, is het werk, menselijkerwijs gesproken, volledig. Het overvloedige materiaal is kundig gerangschikt en wie over enig punt betreffende de bibliographie der Nederlandse (met inbegrip van de Vlaamse) wijsbegeerte wil worden ingelicht, zal niet worden teleurgesteld. Naast deze meer technische nuttigheid heeft het boek echter nog bijzondere waarde, doordat het een levendig beeld geeft van het wijsgerig leven ten onzent. De uitgave is goed verzorgd.

E. W. BETH.

L y m a n M. K e l l s, Elementary Differential Equations, 3e druk, New-York en Londen, 1947.

De schrijver beziet de differentiaalvergelijkingen zowel uit het oogpunt van de physicus of de ingenieur als uit dat van de mathematicus. Men vindt dus in dit boek een eenvoudige behandeling van de bekende typen van vergelijkingen, gevolgd door een groot aantal uitgewerkte voorbeelden en opgaven, zorgvuldig naar opklimmende moeilijkheid gerangschikt. Maar bovendien wordt grote aandacht gewijd aan de natuurkundige interpretatie van een vergelijking en van de oplossing van deze.

De behandeling is elementair gehouden. Dit sluit echter niet uit, dat existentie-theorema's aan de orde komen. De schrijver past hierbij een tweevouden-systeem toe. In het begin van het boek vinden we al theorema's, waarin eenvoudigheidshalve te beperkende voorwaarden genoemd worden. Met algemenere theorema's maken we verderop kennis, ter voorbereiding van een hoofdstuk over oplossing door reeksontwikkeling en door methoden van opvolgende benaderingen. Bewijzen geeft hij niet. Voor velen zal echter dit gemis ruimschoots vergoed worden door de toelichting in de vorm van zeer leerzame voorbeelden, die de betekenis van de theorema's in het licht stellen.

Alle opgaven zijn voorzien van antwoorden.

Een zeer mooi werkje!

H. J. E. BETH.

D. J. v a n R o o y, Analitiese Meetkunde van die plat vlak. Stellenbosch 1946 (Pro Ecclesia drukkerij), 312 blz.

Dit boek van de Potchefstroomse hoogleraar is een eersteling met betrekking tot de taal, waarin het is geschreven: een hoger wiskundig leerboek in het Afrikaans bestond nog niet. Echter niet alleen daarom begroeten wij het met genoegen: het is een helder en uitvoerig werk, bedoeld voor de beginnende student, dat er mag zijn. Het bestaat uit twee delen:

I. Die reguit lijn en die sirkel; II. Die kegelsnedes. De behandelingswijze is eenvoudig. Wat stof en moeilijkheidsgraad betreft, zou ik het bij vergelijking met de diverse Analytische Meetkundeboeken ten onzent, willen plaatsen tussen de werken van Schrek en Rutgers. Het telt een groot aantal opgaven ter oefening en vele voorbeelden, die het de student zullen vergemakkelijken in de stof door te dringen. In de taal treffen vele opmerkelijke uit-

drukkingswijzen, ook afwijkingen van de Nederlandse terminologie. Zo *locus* voor *meetkundige plaats,* tussen haakjes ook eenmaal *meetkundige pad* genoemd, en *gradient* voor richtingstangent van een rechte.

Wij wensen de auteur veel succes met zijn ondernemen.

J. F. KOKSMA.

V. Esbach, Hogere Wiskunde, Deel I. 's-Gravenhage—Batavia, 1948. G. B. van Goor Zonen's Uitgeversmaatschappij. (270 pag., *f* 14.50).

In dit deel wordt een inleiding tot de differentiaal- en integraalrekening gegeven. Het is jammer, dat de schrijver in een voorwoord niet uiteenzet voor welke categorie van studerenden dit werk bedoeld is.

In de eerste plaats moet dan geconstateerd worden, dat de schrijver blijkbaar geen exacte opbouw van de analyse heeft willen geven. Om enkele voorbeelden te geven: bij de afleiding van de binomiaalformule van Newton wordt het principe van de volledige inductie toegepast zonder hierop in te gaan en zonder dit zelfs te noemen (pag. 30—31). Ook wordt hier — zo zonder meer — de oneindige reeks en de som daarvan ingevoerd (pag. 34, 35, e.v.). Dit boek is dus niet geschikt voor aanstaande mathematici, physici en astronomen, maar is meer bedoeld voor aanstaande ingenieurs, chemici, enz.

In vele opzichten is dit werk voor dergelijke studenten aan te bevelen. Het is breed van opzet, het geeft bij de definities en stellingen tal van toelichtingen en voorbeelden en het bevat een ruime verzameling van vraagstukken. Een enkele maal vervalt de schrijver in herhalingen, misschien met opzet.

Men moet ook niet denken, dat de strengheid volkomen uit het oog is verloren. Bij de stellingen worden de voorwaarden, waaronder deze gelden, uitdrukkelijk opgenoemd. Niet altijd begrijp ik echter, waarom een bepaalde voorwaarde ingevoerd wordt; zo eist de schrijver bij het theorema van Rolle bijv., dat de afgeleide van de beschouwde functie continu is (pag. 135) in plaats van de gebruikelijke voorwaarde, dat de afgeleide bestaat. Ik geloof niet, dat het bewijs daardoor vereenvoudigd wordt.

Dat men in een dergelijk boek soms een beroep doet op aanschouwing en intuïtie is stellig heel juist. Maar toch had ik hier en daar de behandeling graag iets meer exact gezien. Ik denk bijv. aan de merkwaardige manier, waarop de „onbepaalde integraal" inge-

voerd wordt (pag. 224—225). Storend vind ik ook, hoe op pag. 2 het symbool → vlak achter elkaar in twee geheel verschillende betekenissen gebruikt wordt.

Met dit voorbehoud kan ik dit boek echter aanbevelen aan diegenen, die de hogere wiskunde slechts terwille van de toepassingen op de techniek, enz. moeten kennen.

Ik merk nog op, dat in de errata enkele onjuiste opgaven voorkomen. Druk en papier zijn goed.

POPKEN.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van J. B. Wolters:

P. Visser, *Leerboek der vlakke driehoeksmeting,* I. De goniometrie van de enkele hoek, **9de druk,** *f* 0.75.

Van P. Noordhoff:

Prof. Dr J. G. Rutgers, *Leerboek der Beschrijvende Meetkunde,* eerste deel, De Rechthoekige Projectie, 1ste stuk, **2de druk,** *f* 3.25.

P. W. Frederik en J. de Raad, *De perspectivische verschijnselen.* **3de druk,** *f* 1,75.

Een eenvoudig boekje over de perspectief, dat we een ieder kunnen aanbevelen. Leraren in de stereometrie kunnen de leerlingen dit boekje in handen geven; het is zo duidelijk geschreven en verlucht met zoveel figuren (op de 68 blz. 88 stuks), dat de jongens de beginselen zich zelf eigen kunnen maken. Een figuur in perspectief is gewoonlijk duidelijker dan in een of andere projectie; zeker dan in scheve projectie. —
Mede zeer geschikt voor onderwijzersopleiding, voor de M.T.S.; ook voor de akte Wiskunde.

B. H. Gerritsma en G. H. Koudijs, *Toelatingsexamens* voor de Middelbare Technische Scholen in Nederland voor overwegend practisch opgeleiden. **2de druk,** *f* 1.75.

Wijdenes en van der Ploeg, *Rekenen* voor het Nijverheidsonderwijs, bewerkt door A. C. Bruinshoofd, 1ste stukje. **4de druk,** *f* 1.10.

P. Wijdenes en Dr D. de Lange, *Vlakke meetkunde,* deel II. **11de druk,** *f* 2.90.

P. Wijdenes en Dr P. G. van de Vliet, *Logarithmen-, intrest- en discontotafels,* uitgave E van Noordhoff's Tafels, **6de druk,** met hulpboekje, gec. *f* 4.40.

DEENSCHE SCHOOLBOEKEN OVER WISKUNDE

door

J. H. SCHOGT.

Tijdens een vacantiereis in den zomer van 1947, die ik zooveel mogelijk tot een studiereis heb trachten te maken, is het mij gelukt eenige gegevens te verzamelen omtrent het wiskunde-onderwijs in Denemarken. Bijwoning van een paar lessen aan Frederiksberg-Gymnasium — de cursus begint daar half Augustus — was natuurlijk niet voldoende om een indruk te verschaffen van wat bereikt wordt, en hoe dit geschiedt. Maar met groote vrijgevigheid heeft men mij exemplaren van eenige moderne schoolboeken geschonken, en wat hieruit te leeren valt omtrent programma en methode is het onderwerp van dit opstel.

Over het middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs in Denemarken is in dit tijdschrift reeds vroeger geschreven [1]; wat in bedoeld artikel staat is thans nog in hoofdzaak juist. Het is echter allicht wenschelijk, hier zeer in het kort de inrichting van het Deensche onderwijs in herinnering te brengen. De weg van de lagere school naar de universiteit duurt 7 jaar en loopt over twee scholen: de vierjarige tusschenschool (Mellemskole) en het driejarige gymnasium, dat drie afdeelingen heeft, te weten de wis- en natuurkundige, de moderne-taalkundige en de klassieke „lijn". De eerste komt in hoofdzaak overeen met onze H.B.S.-B (geen Latijn of Grieksch), de tweede is a.h.w. een H.B.S.-A met Latijn, de derde komt overeen met ons gymnasium α, maar zij stelt zeer weinig leerlingen en bestaat slechts aan enkele scholen.

In het volgende komt het wiskunde-onderwijs in de wis- en natuurkundige afdeeling van het gymnasium ter sprake, maar het is noodig, ter inleiding iets te zeggen over het onderwijs aan de tusschenschool. Daar worden van de wiskunde behandeld de reken- en stelkunde en de vlakke meetkunde. In de reken- en stelkunde gaat de tusschenschool, naar blijkt uit het boekje dat ik tot mijn beschikking heb [2], ongeveer zoo ver als bij ons de tweede klasse

---

[1]) J. K. Eriksen, Over het middelbaar onderwijs in Denemarken, in het bijzonder het onderwijs in natuurwetenschappen en wiskunde. Euclides VII (1931), blz. 197—234.

[2]) A. Kristensen, Lærebog i Aritmetik og Algebra for Mellemskolen. København, Det Schønbergske Forlag, 1946.

der H.B.S., alleen wordt bovendien de oplossing van eenvoudige vierkantsvergelijkingen nog besproken. In het oog springende verschillen met de hier te lande gebruikelijke behandelingswijze zijn o.a. de volgende. Aan merkwaardige producten en ontbinding in factoren wordt veel minder plaats toegekend, de graphieken bepalen zich tot rechte en omgekeerde evenredigheid. Bij de behandeling der vergelijkingen wordt er sterk de nadruk op gelegd, dat het maken van de proef een noodzakelijk onderdeel van de oplossing vormt, hetgeen verband houdt met de omstandigheid, dat het begrip æquivalentie van vergelijkingen nergens besproken wordt. Bij de behandeling der z.g. „ingekleede vraagstukken" wordt er nog eens uitdrukkelijk de aandacht op gevestigd, dat behoort te worden nagegaan, of de gevonden oplossing voldoet *aan het vraagstuk,* niet alleen aan de vergelijking. Deze belangrijke quaestie pleegt men hier te lande te negeeren, ten deele misschien, omdat zij voor de leerlingen moeilijk is. Het onderwijs in de vlakke meetkunde is op eigenaardige wijze over tusschenschool en gymnasium verdeeld. Een leergang in twee ronden is het eigenlijk niet, daar slechts voor één bepaald onderwerp de behandeling op het gymnasium een aanvulling geeft tot de behandeling op de tusschenschool; dit onderwerp is de evenredigheid van lijnstukken, die op de tusschenschool slechts voor meetbare verhoudingen besproken wordt. Een herhaling der grondslagen vindt echter niet plaats, ook niet als inleiding tot de stereometrie. Het leerboek voor de tusschenschool, waarover ik beschik [1]), behandelt vrijwel de geheele vlakke meetkunde, aanvankelijk zeer aanschouwelijk (maar niet experimenteel), later op ongeveer dezelfde wijze als hier te lande gebruikelijk is; de volgorde der onderwerpen is heel anders, maar dat is niet essentiëel. Op axioma's wordt weinig nadruk gelegd, daarentegen wordt het verschil tusschen rechte lijn, halve lijn en lijnstuk van den beginne af scherp in het oog gehouden.

Voor rekenen en wiskunde beschikt de tusschenschool in haar vier klassen over 4, 5, 6 en 7 lesuren per week.

De wis- en natuurkundige afdeeling van het gymnasium, overeenkomende met de hoogste drie klassen van onze H.B.S.-B., heeft in elk der klassen wekelijks 6 uur wiskunde. Van de leerboeken voor deze afdeeling heb ik er 4 tot mijn beschikking. Eerst een enkel woord over de inrichting.

---

[1]) Lærebog i Plangeometri for Mellemskolen af Julius Petersen. 6e Udgave ved Dr. phil. C. Hansen, gennemset af Alb. Kristensen. København, Det Schønbergske Forlag, [1945].

Het corpus van leerboeken van Prof. Jul. Petersen [1]) bevat onder meer een aantal boeken voor deze afdeeling; het zijn leerboeken voór de vakken afzonderlijk. Zij geven theorie met enkele voorbeelden; achterin staan de vraagstukken. In het werk van Juul en Rønnau [2]) daarentegen is de verdeeling der leerstof over drie deelen aangebracht overeenkomstig de verdeeling over de drie klassen; elk deel bevat dus de leerstof voor een klasse. (Hierbij moet men bedenken, dat de verdeeling der leerstof over de klassen in Denemarken niet van hoogerhand is voorgeschreven, zooals dat bij ons het geval is, maar aan de scholen wordt overgelaten.) De drie deelen geven theorie met vele geheel of gedeeltelijk uitgewerkte voorbeelden; de uitvoerigheid, waarmee de theorie wordt uiteengezet, en de veelheid der voorbeelden moeten het mogelijk maken, dat de leerlingen het boek bestudeeren, zonder dat bespreking is voorafgegaan. Dit staat in het voorbericht en wordt, zooals ik zelf heb kunnen constateeren, ook inderdaad in practijk gebracht. De vraagstukken zijn opgenomen in drie afzonderlijke vraagstukkenboekjes [3]). Geheel op dezelfde wijze is ingericht het werk van Pihl, Kristensen en Rubinstein [4]); een sterk gewijzigde herdruk op naam van Pihl en Rubinstein is bezig te verschijnen. Het werk van Andersen en Mogensen [5]) bestaat uit vijf deelen, het eerste geeft de leerstof voor de eerste klasse, terwijl de overige deelen elk een onderdeel behandelen (differentiaal- en integraalrekening; analytische meetkunde; aanvullingen op het gebied der algebra, waaronder vectorrekening en de kinematische grondbegrippen; stereometrie). Ook deze leerboeken geven theorie met uitgewerkte voorbeelden; de bijbehoorende vijf deeltjes met vraagstukken zijn van andere auteurs [6]).

De algebraïsche onderwerpen, die ter sprake komen, worden op

---

1) Prof. Jul. Petersens System af matematiske Lærebøger til Skolebrug. København, Det Schønbergske Forlag. Een oude verzameling, herhaaldelijk op de hoogte des tijds gebracht.

2) E. Juul og E. Rønnau, Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie. København, Ejnar Munksgaard.

3) Juul og Rønnau, Matematiske Opgaver. København, Ejnar Munksgaard.

4) Pihl, Kristensen og Rubinstein, Lærebog i Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium. København, Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag.

Pihl, Kristensen og Rubinstein, Matematiske Opgaver. København, G. B. N. F.

5) A. F. Andersen og Poul Mogensen, Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie. København, G. B. N. F.

6) K. R. Buch, W. Fenchel, S. Lauritzen, Matematiske Opgaver. København, G. B. N. F.

ongeveer dezelfde wijze behandeld als bij ons in de moderne leerboeken het geval is. De quadratische functie wordt vooropgesteld, en de vierkantsvergelijking als onderdeel van de behandeling beschouwd, de behandeling geschiedt geheel in het reëele getallengebied, en de complexe getallen krijgen een plaats aan het einde van de algebra, soms (Andersen en Mogensen) in verband met vectorrekening. De vectortheorie wordt namelijk bij de wiskunde ondergebracht, evenals de kinematica van het stoffelijke punt, voorzoover het de ontwikkeling der vectorieele begrippen snelheid en versnelling betreft (niet bijvoorbeeld de samenstelling van bewegingen); de behandeling is aanmerkelijk beknopter dan te onzent bij de mechanica als afzonderlijk leervak. Men vindt in alle genoemde boeken de onderscheiding in vrije, glijdende en gebonden vectoren, de theorie beperkt zich echter doorgaans tot de vrije vectoren; van de genoemde boeken geeft alleen dat van Juul en Rønnau ook iets over glijdende vectoren. Dit onderwerp wordt daar behandeld op de ouderwetsche manier, die wij uit onze mechanicaboeken kennen. Bovendien beperken alle bovengenoemde boeken zich tot vlakke vectorenstelsels: noch de optelling van vrije vectoren in de ruimte met behulp van projectie op onderling loodrechte assen, noch de herleiding van ruimtelijke stelsels glijdende vectoren komt ergens ter sprake. Omtrent de overige onderwerpen, die gewoonlijk tot de reken- en stelkunde gerekend worden, valt slechts het volgende op te merken: de genoemde leerboeken bevatten alle een kort hoofdstuk over poolcoördinaten, iets over permutaties en combinaties, over reeksen en samengestelde interest. De bij ons vaak zoo zonderling geïsoleerde reststelling maakt deel uit van een hoofdstuk over polynomia en algebraïsche vergelijkingen. Aan het getalbegrip wordt vrij wat plaats ingeruimd. Van de natuurlijke getallen wordt de deelbaarheid uitvoerig besproken, de algorithmus van Euclides en de ontbinding in factoren. Voor de eenduidigheid der ontbinding in priemfactoren geven Andersen en Mogensen een aardig bewijs, dat, naar ik meen, van Zermeló afkomstig is. Van de rationale noch van de reëele getallen wordt een eigenlijke theorie gegeven, maar het rekenen met irrationale getallen wordt zeer uitvoerig toegelicht met benaderende getallenrijen of intervalverzamelingen.

Véél uitvoeriger dan hier te lande het geval is worden in Denemarken de beginselen der differentiaal- en integraalrekening behandeld, alsmede wat daarmee samenhangt. Die grootere uitgebreidheid vindt niet in hoofdzaak haar oorsprong in een grooter aantal behandelde functies: ook daar vormen x^n en de gonio-

metrische functies den hoofdschotel. Maar op de theorie wordt veel dieper ingegaan. De behandeling begint, zooals te verwachten is, met de limieten van varianten, waarbij van de bekende ε-definitie wordt uitgegaan, en de regels over som, verschil, product en quotiënt (omgekeerde) worden bewezen. Daarna komt het moeilijke begrip grenswaarde eener functie. Juul en Rønnau gaan uit van reeksen van functiewaarden, die behooren bij reeksen van waarden der onafhankelijke veranderlijke, Andersen en Mogensen, die hier veel uitvoeriger zijn, geven een ε-definitie en bewijzen stellingen voor het rekenen met limietwaarden van functies. Op uitvoerige beschouwingen over continuïteit volgt dan een uiteenzetting van het begrip differentieerbaarheid; monotonie, oscillatie e.d. komen ter sprake, en er worden voorbeelden gegeven van functies, die in zeker punt continu zijn, maar niet differentieerbaar ($\sqrt{x}$, $x \sin \frac{1}{x}$). De techniek van het differentieeren wordt behandeld als bij ons, maar inverse, impliciete en samengestelde functies worden daarbij niet vergeten. Het bewijs van den kettingregel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

beslaat bij Andersen en Mogensen twee bladzijden en houdt rekening met allerlei bijzondere gevallen. De stelling van Rolle en de middelwaardestelling behooren tot de leerstof, en een afzonderlijk hoofdstukje is gewijd aan het onderzoek van krommen, die door haar vergelijking gegeven zijn, terwijl ook andere meetkundige toepassingen der differentiaalrekening worden behandeld. — Eveneens bij de integraalrekening ligt de nadruk meer op de theoretische fundeering dan op de techniek; de integraalrekening wordt o.a. toegepast op de berekening van oppervlakten en inhouden. Niet onvermeld mag blijven de behandeling van de exponentieele functie en van de natuurlijke logarithme. Juul en Rønnau, evenals Pihl, Kristensen en Rubinstein, knoopen aan bij de integraal $\int_0^t \frac{dt}{t}$, Andersen en Mogensen geven een uitvoerige inleiding over oneindig voortloopende reeksen en komen zoo tot de functie e^x.

De gedeelten der Deensche leerboeken, waarin wij de minste afwijkingen van onze gewoonten aantreffen, zijn die over analytische meetkunde (beperkt tot het platte vlak) en over gonio- en trigonometrie.

Wat de vlakke meetkunde betreft heb ik reeds gewezen op de, voor ons, vreemde verdeeling der leerstof over verschillende hoofdstukken. Een groot gedeelte wordt op de tusschenschool behandeld;

het gymnasium geeft hoofdstukken over „gelijkvormige driehoeken" (wij zouden zeggen over evenredigheid van lijnstukken), over „puntenstelsels", en over „constructies". Het eerste dezer drie hoofdstukken geeft in hoofdzaak de theorie der irrationale verhoudingen, en leidt eenige formules af, waaronder de verdubbelingsformule uit de theorie der regelmatige veelhoeken. De „puntenstelsels" behandelen transformaties, in het bijzonder de verplaatsing met de algemeene congruentiedefinitie, en de vermenigvuldiging van figuren met homothetie en gelijkvormigheid. Het hoofdstuk over constructies bevat een overzicht der methoden tot het oplossen van werkstukken. Een onderwerp als „oppervlakte en omtrek van den cirkel" komt niet in de meetkundige hoofdstukken voor, maar in de algebra bij limietbeschouwingen. Het onderwijs der tusschenschool wordt niet aangevuld met axiomatische grondslagen; ik heb den indruk gekregen, dat men aan de eischen der strengheid genoegzaam meent te hebben voldaan bij de analytische behandeling.

De behandeling der stereometrie is vrij aanschouwelijk; er worden wel eenige axioma's genoemd, maar zij worden niet consequent gebruikt. Het werk van Pihl, Kristensen en Rubinstein, dat trouwens het strengste is van de mij bekende boeken, geeft echter b.v. zes axioma's over de verplaatsing van figuren in de ruimte. Aan de bij ons zoo populaire netwerken wordt niet veel gedaan, over het geheel is de behandeling beknopter dan hier te lande, maar de stof dezelfde. De bolmeetkunde en de stelling van Dandelin behooren tot de leerstof. Op één punt geven de Deensche boeken echter meer dan de Nederlandsche, zij behandelen namelijk een weinig boldriehoeksmeting. Zoowel Andersen en Mogensen als Juul en Rønnau wijden aan de theorie met uitgewerkte voorbeelden zes bladzijden, de vraagstukkenverzamelingen bevatten opv. 45 en 32 vraagstukken over boldriehoeksmeting, waaronder heel wat cosmographische toepassingen. Het is dus blijkbaar mogelijk, de boldriehoeksmeting beknopt te behandelen, zonder te verdrinken in een zee van vraagstukken. Daardoor wordt de zonderlinge toestand vermeden, dat men wel de planimetrische, maar niet de stereometrische toepassingen der goniometrie behandelt, terwijl deze laatste voor het onderwijs in de cosmographie toch zeer nuttig zijn.

Naar de boeken te oordeelen staat het wiskunde-onderwijs aan de Deensche gymnasia op een hoog peil; de eindexamenvraagstukken geven mij den indruk, dat men zich weet te hoeden voor overdreven examendressuur, de vraagstukken zijn voor onze begrippen nogal eenvoudig. Hieronder volgen de opgaven, die deze

maand (Mei 1948) ter schriftelijke oplossing zijn gegeven aan de candidaten voor het eindexamen (Studentereksamen).

I.

1. Onderzoek en teeken de kromme, die tot vergelijking heeft

$$y = \frac{x}{\sqrt{(x-1)}}.$$

Bereken de oppervlakte der gesloten figuur, begrensd door de kromme, de x-as, en de rechte lijnen $x = 2$ en $x = 5$.

2. Een driehoek heeft tot hoekpunten A(— a, 0), B(0, b) en C(a, 0). Een rechte lijn beweegt zich zoodanig, dat zij steeds loodrecht op de x-as blijft; zij snijdt de lijn AB in P en de lijn BC in Q.

Zoek de vergelijking der meetkundige plaats van het snijpunt van CP en AQ, geef de soort van de gevonden kromme aan en haar ligging t.o.v. het coördinatenstelsel.

3. In het parallelogram ABCD is de zijde $\overline{AB} = 9{,}894$, de zijde $\overline{BC} = 5{,}736$ en de diagonaal $\overline{AC} = 7{,}652$.

De middelpunten der ingeschreven cirkels der driehoeken ABC en ACD worden opv. P en R genoemd, de projectie van P op AC is Q, die van R op AC is S.

Bereken de zijden, de hoeken en de diagonalen van vierhoek PQRS.

II.

1. Eén schuld is aangegaan op 2 Januari 1930. De aflossing is zoo geregeld, dat elk jaar, voor het eerst 2 Januari 1931, voor het laatst 2 Januari 1951, een bedrag, groot 6 % van de oorspronkelijke schuld wordt betaald, terwijl bovendien op 2 Januari 1940 een extra betaling van 2000 kronen geschiedt. Bij de jaarlijksche betaling op 2 Januari 1951 is de geheele schuld gedelgd.

Hoe groot was de schuld? Rentevoet 5 % per jaar.

2. In een regelmatig viervlak ABCD met ribbe 2 is M het midden van $\overline{AB}$ en N het punt van $\overline{CD}$, zoo dat $\overline{CN} = \frac{3}{4}$.

Bereken de lengte van $\overline{MN}$ en den standhoek der vlakken ABC en ABN.

Bereken de verhouding van de inhouden der deelen, waarin het regelmatige viervlak wordt verdeeld door het vlak ABN.

3. Construeer een driehoek ABC als de hoek A, het hoogtelijnstuk h_b het zwaartelijnstuk m_a in grootte gegeven zijn. Bespreek de voorwaarden voor de mogelijkheid en het aantal oplossingen.

OVER ENIGE GRONDBEGRIPPEN UIT DE MEETKUNDE [1])

door

Dr J. HAANTJES.

Met betrekking tot de plaats, die de wiskunde inneemt onder de wetenschappen hebben een tweetal schijnbaar tegenstrijdige uitspraken een zekere bekendheid verworven. In de eerste wordt de wiskunde *„de dienares der wetenschappen"* genoemd, de tweede beschrijft haar als *„de koningin der wetenschappen"*. Elk van deze gezegden wijst op een bepaald aspect van de wiskunde. Het is vooral de natuurwetenschap, die telkens weer de hulp inroept van de wiskunde en naar het steeds weer blijkt met succes. Treffende voorbeelden hiervan zijn er vele. Als er onregelmatigheden worden waargenomen in de baan van de planeet Uranus worden deze toegeschreven aan de aanwezigheid van een nog onbekende planeet. En omdat het ondoenlijk is het gehele luchtruim af te zoeken gaat men de wiskunde te hulp roepen. De telescoop wordt gericht naar de plaats door twee wiskundigen opgegeven (Adams en Léverrier). Zou het de man achter deze kijker niet ontroerd hebben en met ontzag voor de schepping hebben vervuld, toen hij in de aangegeven richting werkelijk een planeet ontdekte?

De wiskunde een dienares dus, maar ook is waar, dat zij zelf niets vraagt en ook niets zal aannemen van haar zusterwetenschappen. Integendeel, haar eenvoud wat betreft het uitgangspunt heeft een grote ontwikkeling van het mathematisch denken mogelijk gemaakt en daardoor kan juist zij andere meer gecompliceerde wetenschappen in vele gevallen de weg wijzen. Haar wezen rijst boven elke mogelijke toepassing uit. En kan men het dan Gauss, al is hij zelf een wiskundige, kwalijk nemen, dat hij deze volgens Whitehead meest oorspronkelijke schepping van de menselijke geest qualificeert als „koningin der wetenschappen"?

Wanneer U de geschiedenis van de wiskunde nagaat van haar ontstaan af in de oudheid tot nu toe, zult U steeds weer stuiten op dit tweeledige karakter van de wiskunde. Onder de grote mathematici, die de wereld gekend heeft, zult ge er aantreffen, die zich in de keuze van hun werk meer lieten leiden door de betekenis hiervan voor andere takken van wetenschap. Newton bijvoorbeeld, die

[1]) Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Leiden op 28 Mei 1948.

als wiskundige in de 17e eeuw slechts wordt geëvenaard door L e i b n i z, schijnt de rechtvaardiging van zijn wiskundige ontdekkingen voornamelijk te hebben gezocht in het gebruik wat hij hiervan wist te maken. Zijn invloed was zo groot, dat in het naar hem genoemde tijdperk het onderscheid tussen wiskunde, mathematische physica en astronomie geheel vervaagde. Het is de dienende taak van de wiskunde, die hier primair is.

Anderen echter zowel voor als na N e w t o n hebben veel minder belangstelling getoond voor mogelijke toepassingen. Zij zijn vooral gegrepen geweest door de wiskunde als eén wetenschap op zich zelf, door de wiskunde als kunst, hebben zich misschien meer laten leiden door een gevoel van symmetrie, van eenvoud of abstractie. Zij hebben er zich voornamelijk toe bepaald haar fascinerende geheimen aan het licht te brengen, de mogelijke toepassingen beschouwende als ongezochte bijproducten.

Wat deze twee aspecten betreft verschilt de wiskunde van nu niet met die van vroeger; dit karakter is niet gewijzigd niettegenstaande de ontwikkeling, die ze heeft doorgemaakt en nog doormaakt. Het invoeren van nieuwe begrippen heeft het steeds weer mogelijk gemaakt dieper in haar geheimen door te dringen en het bestaande beter te doorzien. Wanneer we thans een ogenblik willen stilstaan bij enkele van deze moeizaam verworven ontdekkingen en bij de worsteling om de mathematische zuiverheid van de ingevoerde begrippen, zal ons ook telkens weer opvallen, dat het *nu* weer de dienende functie van de wiskunde, *dan* weer het ideaal van een schoon en hecht mathematisch gebouw is geweest, wat de onderzoekers voor ogen heeft gestaan. Iemand, die de meetkunde tot leeropdracht krijgt, zult U het niet euvel duiden, dat hij hierbij speciale aandacht aan de meetkunde schenkt. Hoewel dit een beperking inhoudt, behoeft deze toch niet zo groot te zijn, daar er steeds een nauw verband is geweest tussen de stand van de wiskundige wetenschap als geheel en de figuren of liever gezegd de objecten, die de geometer bestudeert en de manier, waarop hij deze invoert en beschouwt. De intrede in de wiskunde van de algebra, de differentiaal- en integraalrekening, de verzamelingenleer, de groepentheorie en tal van andere belangrijke hoofdstukken hebben alle een aanzienlijke uitbreiding van de meetkunde mogelijk gemaakt. Maar ook vindt ge in de wijze, waarop de meest fundamentele objecten van de meetkunde worden ingevoerd, verschillende grote ontdekkingen van de wiskunde weerspiegeld.

In dit verband zou ik in 't bijzonder uw aandacht willen vragen voor de begrippen punt en rechte, zoals deze zich in de loop der

tijden hebben ontwikkeld en voor de wijze, waarop deze begrippen door verschillende ontdekkingen in de wiskunde zijn aangeraakt. In de opvattingen omtrent deze begrippen ziet men als in een spiegel verschillende omwentelingen in de wiskunde gereflecteerd.

Een scholier, die de eerste schreden zet op het pad der meetkunde, krijgt veelal eerst een soort definitie te verwerken van de objecten punt, rechte en vlak, waarmede hij verder te doen zal krijgen. Deze begrippen kunnen op verschillende manieren omschreven worden, doch het is niet ongewoon, wanneer de aspirant geometer het volgende wordt meegedeeld:

Een volledig afgesloten deel der ruimte is een lichaam.
De grenzen van een lichaam zijn vlakken.
De grenzen van een vlak zijn lijnen.
De grenzen van een lijn zijn punten.

Deze omschrijvingen zullen de leerling wel niet veel moeite geven vermoed ik of het moet zijn, dat hij niet inziet, waarom aldus begonnen wordt en het daarom dus toch niet begrijpt. Hij weet toch wel — althans meent te weten — wat een punt en wat een lijn is, en wij zullen zijn bewering, dat bovenstaande bepalingen het puntbegrip niet verduidelijken, wel moeten toegeven.

Deze korte beschouwing aangaande de eerste kennismaking met de meetkunde moge er U van overtuigen, dat het gezegde „alle begin is moeilijk" zo ooit hier van toepassing is. Een onberispelijke invoering van de genoemde grondbegrippen der meetkunde brengt blijkbaar zoveel moeilijkheden mee, dat zulks bezwaarlijk in een elementair leerboek kan worden opgenomen. Als de mathematicus Poincaré de vraag stelt „wat is een punt van de ruimte?" voegt hij hieraan toe: „Ieder denkt het te weten maar het is slechts een illusie. Wat wij zien, als wij proberen ons een punt voor te stellen is een zwarte vlek op een wit papier, een krijtvlek op een zwart bord, steeds voorwerpen."

Wie is eigenlijk de uitvinder of moet ik zeggen ontdekker van het mathematische punt? Een moeilijk te beantwoorden vraag, want een bepaalde persoon hiervoor kan men niet aanwijzen, zelfs een bepaalde tijd, waarin dit begrip zou zijn ontstaan is niet aan te geven. Is het eigenlijk wel een bepaald begrip. Wij kunnen echter wel verschillende wiskundigen noemen, wier werk invloed gehad heeft op de opvattingen aangaande de inhoud van begrippen als punt en rechte.

Laten wij beginnen met de Grieken, die zoveel tot de opbouw van de wiskunde hebben bijgedragen, dat alles wat voordien onder de naam wiskunde valt hierdoor enigszins verbleekt, al vrees ik

hiermede de Babyloniërs te kort te doen. Het is vooral door de beroemd geworden Elementa van Euclides (± 300 v. Chr.), dat veel van het werk uit deze gouden eeuw voor latere generaties is bewaard gebleven. Men maakt hierin kennis met de Griekse opvatting van de mathematische wetenschap en bemerkt, dat naast die van dienares een andere waardering van de wiskunde groeiende is. In grote trekken komt hun opvatting wat de methode betreft overeen met de ook thans nog heersende, namelijk het afleiden van mathematische stellingen volgens zekere regels uit enige eenvoudige beginselen. In het eerste deel van het uit dertien boeken bestaande werk behandelt Euclides de inleiding tot de planimetrie. Zonder enige nadere toelichting begint hij met drie soorten uitspraken: definities, postulaten en algemene inzichten. De definities zijn vele, in elk boek vindt men weer nieuwe definities, doch geen verdere uitspraken van de tweede en derde soort, die men tegenwoordig gewend is samen te vatten onder de naam axioma's. Als definities vindt men o.a. de volgende uitspraken. Een punt is wat geen delen heeft en geen grootte heeft. Een lijn is lengte zonder breedte. Euclides zegt niet, wat de bedoeling is van deze uitspraken; men kan slechts gissen wat hij er mede bedoeld zou kunnen hebben. Ook in moderne wiskundige verhandelingen zult ge vaak definities aantreffen; van deze wordt echter steeds geëist, dat zij de inhoud van het gedefinieerde begrip volkomen vastleggen, zodat de eigenschappen alle in de definitie moeten zijn besloten. Men eist steeds, dat het z.g. scheppende definities zijn. Het is duidelijk, dat Euclides deze eis niet aan zijn definities heeft gesteld, maar hoe moeten wij ze dan wel opvatten? Veelal wordt aangenomen, dat we hier te doen hebben met enige voorlopige inlichtingen omtrent de begrippen, waarbij de nadruk valt op het feit dat men niet te doen heeft met zintuiglijk waarneembare grootheden, doch met begrippen, die uit deze door abstractie zijn verkregen. De meetkunde bestaat voor Euclides voornamelijk uit construeren; hij tekent en dan is het eerste wat opvalt, dat men van de dikte van lijnen en punten moet afzien.

In de postulaten wordt precies aangegeven van welke constructies gebruik gemaakt zal mogen worden. In zekere zin zijn de postulaten daardoor tevens bepalend voor de inhoud van de begrippen punt en rechte, want deze inhoud wordt toch bepaald door datgene, wat men met deze objecten kan doen. Het is echter niet de opvatting van Euclides geweest, dat de grondelementen door de postulaten zouden zijn gecreëerd. Voor hem komt aan de begrippen punt en rechte een existentie hoe buiten de postulaten om en is derhalve

de vraag naar de juistheid van de postulaten een reële vraag, al behoort dan deze kwestie misschien niet meer tot de wiskunde.

Gedurende eeuwen blijft de methode in de meetkunde die van de Grieken. Men construeert met passer en liniaal en krommen, waarvan een constructie met deze hulpmiddelen niet mogelijk is, worden als zijnde onbehoorlijke krommen in de meetkunde niet toegelaten. Het duurt tot omstreeks 1600, voordat Descartes de meetkunde bevrijdt van dit keurslijf, waarin zij vooral door de opvattingen van Plato gewrongen is en waaraan naar het schijnt alleen het werk van Archimedes is ontkomen. Wij doelen hier op de geniale vondst van de analytische meetkunde, waarbij de rol van passer en lineaal wordt overgenomen door de veel minder beperkte algebra.

René Descartes was een man van de wereld, die behalve de wiskunde ook het zwaard terdege wist te hanteren. Verschillende malen ontvliedt hij zijn veeleisende vrienden om de voor zijn meditatie zo begeerde rust te zoeken in militaire kampen, een voor onze moderne oren wat vreemd klinkend rustoord. Aan meer dan één veldslag neemt hij actief deel en meer dan eens heeft de analytische meetkunde een „narrow escape". Maar gelukkig was er niet steeds strijd; men kende in die dagen nog de winterkwartieren. En in een van de winters, om precies te zijn op 10 November 1619, ontstaat ergens aan de oevers van de Donau de analytische meetkunde, die men kan beschouwen als een basis voor de moderne meetkunde. Deze wat ongewone preciese aanduiding van de datum van de vondst houdt verband met een drietal dromen, die Descartes op deze dag gehad heeft en die naar hij meedeelt zijn levensloop geheel hebben veranderd. In de eerste droom wordt hij door een boosaardige wind gedreven uit de veiligheid van kerk en school naar een derde partij, waarop deze wind geen vat heeft. De tweede heeft betrekking op een verschrikkelijke storm, die hij aanziet met de ogen van de wetenschap, maar zodra hij heeft uitgevonden wat deze storm eigenlijk is, kan deze hem geen kwaad meer doen. In de derde droomt hij, dat hij een gedicht citeert, dat begint met de regel: „Welke weg zal ik volgen in mijn leven." Descartes zegt dat deze dromen, waarvan ik de inhoud slechts vluchtig noemde, hem zeer aangrepen en dat hem hierin — in 't bijzonder in de tweede — de sleutel geopenbaard werd, die hem in staat zou stellen in het bezit te komen van het ware fundament van de wetenschap. Hij schijnt echter niemand te hebben meegedeeld wat deze sleutel precies inhoudt; doch men neemt gewoonlijk aan, dat hiermede bedoeld is in 't algemeen het vormen van de andere wetenschappen, b.v. de

physica waartoe ook de meetkundige ruimte behoort, tot wiskunde, in 't bijzonder de toepassing van de algebra in de meetkunde, de analytische meetkunde dus. Nog achttien jaren verlopen, aleer de resultaten van zijn overdenkingen worden gepubliceerd; hij gaat er pas dan toe over als kardinaal de Bérulle hem met de nodige eeuwige straffen dreigt voor het geval hij het zou nalaten.

De ons thans zo simpel voorkomende grondgedachte van de analytische meetkunde is de volgende. Men beschouwt — om bij het platte vlak te blijven — hierin twee snijdende rechten, b.v. twee rechten, die loodrecht op elkaar staan. De plaats van een punt is nu volkomen bepaald door de afstanden (laten wij ze x en y noemen) van dit punt tot de beide gekozen rechten. Men zegt daarom: een punt wordt voorgesteld door deze twee getallen, door het geordend getallenpaar (x, y) die men de coördinaten van het punt noemt. De coördinaten van de punten van een rechte lijn blijken aan een lineaire betrekking te voldoen en omgekeerd bepaalt deze betrekking de rechte. Vandaar het gezegde: een lijn wordt voorgesteld door een lineaire vergelijking. Bij elke meetkundig gedefinieerde kromme blijkt nu een vergelijking te behoren, maar — wat voor de ontwikkeling veel belangrijker is — men kan ook van een tegenovergesteld standpunt uitgaan door op te merken, dat bij elke vergelijking een kromme behoort of liever gezegd dat elke vergelijking een kromme definieert. Het veld van onderzoek wordt hierdoor ontdaan van de beperkingen door passer en lineaal gesteld. De kracht van de methode ligt hierin, dat men algebraische en analytische eigenschappen van vergelijkingen geometrisch kan interpreteren en omgekeerd.

Welke invloed heeft deze ingrijpende verandering van methode gehad op het puntbegrip en het lijnbegrip? Bij de zoëven geschetste opzet begonnen wij met in een plat vlak twee rechten te beschouwen om daarna de afstanden van een punt tot deze rechten als coördinaten van het punt in te voeren. Maar dat onderstelt vooraf de bekendheid van de begrippen plat vlak, rechte en punt. Vandaar ook de uitdrukkingswijze: een punt wordt *voorgesteld* door zijn coördinaten (x, y) een lijn wordt *voorgesteld* door een lineaire vergelijking. En de behoefte blijft bestaan die duistere begrippen punt en rechte nader mathematisch te definiëren. Maar als wij letten op het feit, dat alle eigenschappen van het punt die onze belangstelling hebben, d.w.z. de meetkundige eigenschappen uit het bijbehorend getallenpaar volgen, zien wij dat de analytische meetkunde een mogelijke uitweg uit de moeilijkheden biedt. Men doet afstand van het mystieke punt, dat door zijn coördinaten zou zijn

voorgesteld en poneert: een punt *is* een getallenpaar (x, y), een lijn *is* een lineaire vergelijking. Het vlak is de verzameling van alle getallenparen. Kiest men als uitgangspunt niet het tweedimensionale vlak, maar de driedimensionale ruimte, dan wordt men op analoge wijze gevoerd tot de definitie: een punt is een drietal getallen, geschreven in een bepaalde volgorde. De verzameling van al deze drietallen heet ruimte. Maar dan is er geen reden meer om het bij drie te laten. De weg naar verdere uitbreidingen ligt na het genoemde puntbegrip open. Een vierdimensionale ruimte is de verzameling van de geordende viertallen, die men punten noemt. U bemerkt, mathematisch gezien heeft een vier- en hogerdimensionale ruimte niets ongewoons, niets bovennatuurlijks. Het zijn ook niet deze hoger dimensionale ruimten zelf, doch de gedachten, die dit begrip tot iets gewoons maakten, die onze bewondering verdienen.

Hoewel dit alles in enkele regels neergeschreven kan worden en met een paar zinnen gezegd is, zou het toch nog vele jaren duren, voordat dit puntbegrip en lijnbegrip in de wiskunde algemeen werd aanvaard. Descartes' eigen opvatting is hiervan nog ver verwijderd. De existentie van meetkundige figuren is voor hem een soort bovennatuurlijke existentie. Ik kan mij een driehoek, een punt voorstellen aldus Descartes, hoewel deze figuur niet bestaat en nooit heeft bestaan in de wereld buiten mijn gedachten. Naar zijn mening heeft God de grondbegrippen ingedrukt in onze zielen en deze indrukken stelt hij boven de ervaring. Het was blijkbaar eerst nodig dat men zich bezig ging houden met verschillende soorten van ruimten, die ook maar weinig meer leken op de ervaringsruimte, waardoor een beroep op deze ruimte voor de omschrijving van de grondbegrippen niet meer bevredigt. Maar in de 18e eeuw nog noemt d'Alembert het een ergerlijke tekortkoming van de meetkunde van zijn tijd, dat deze hem geen definitie kan verschaffen van een rechte lijn. Het is dan ook niet zo, dat met Descartes de zojuist genoemde opvattingen hun intrede in de meetkunde deden, doch zijn theorie sloot deze mogelijkheid in zich en moest hier op den duur wel op uitlopen.

Met enthousiasme werpen vele wiskundigen zich op deze analytische meetkunde, aangemoedigd door de successen en getroffen door de eenvormigheid van haar methode, die in vergelijking met de oudere methode soms de indruk wekt, dat de algebra voor de meetkunde werkt als een automaat. Zelfs de getallentheoreticus Fermat, tijdgenoot van Descartes, komt onder de bekoring van de nieuwe meetkunde, die hij voor een groot deel onafhankelijk van Descartes ontwikkelt. Een van de problemen, waarmede Fermat

zich bezig houdt is het vinden van de raaklijn aan een in de analytische meetkunde gegeven kromme, daarmede tevens een begin makend met een andere tak van de wiskunde, de differentiaalrekening. Weliswaar nog maar een schamel begin, doch voldoende om de grote Newton te inspireren tot zijn baanbrekend werk op dit gebied. Het zijn Newton in Engeland en Leibniz in Duitsland, die de wiskunde verrijken met de differentiaal- en integraalrekening, elkaar hun vindingen betwistend, hierin aangemoedigd door hun landgenoten. De eerstgenoemde schept deze tak van de wiskunde voornamelijk om zijn problemen van de dynamica tot een oplossing te kunnen brengen. Voor hem is de wiskunde een hulpwetenschap, waarmede hij zich bezig houdt terwille van de physica. Leibniz daarentegen is meer geïnteresseerd in de zuivere wiskunde en de leer van het denken. Hun resultaten zijn in hoofdzaak dezelfde.

Deze differentiaal- en integraalrekening luidt voor de meetkunde een nieuw tijdperk in, die van de differentiaalmeetkunde, aanvankelijk nog beperkt tot de driedimensionale ruimte alhoewel men over het rekenapparaat voor meerdimensionale ruimten beschikt. Men is nog enigszins huiverig voor ruimten met meer afmetingen. Poisson formuleert zijn bezwaar als volgt: „De meetkunde van de meerdimensionale ruimte mist elke concrete basis, elk substraat, die het mogelijk maakt de verkregen resultaten visueel en in zekere zin tastbaar voor te stellen." Wij zien hier hoe moeilijk de meetkunde zich losmaakt van de tastbare objecten der ervaringsruimte, in de diep gewortelde overtuiging, dat de coördinaten van een punt behalve deze getallen noodzakelijk nog iets representeren. En wat heeft het voor zin over vierdimensionale ruimten te spreken als men in het duister tast omtrent het wezen van een punt in deze ruimte.

De bevrijding van deze in dit stadium remmend werkende gedachten wordt mede gebracht door het werk van Riemann. In 1854 wordt Riemann toegelaten als docent aan de Universiteit van Göttingen en overeenkomstig het gebruik moet hij zijn geschiktheid tonen door het houden van een lezing voor de faculteit. Hij stuurt drie titels in, waaruit de faculteit — dit betekent in dit geval Gauss — kan kiezen. De eerste twee onderwerpen heeft Riemann voorbereid, het derde, handelende over de grondslagen der meetkunde, echter niet. In afwijking van de gewoonte kiest Gauss echter juist dit derde onderwerp. Hij is zeer benieuwd wat zo'n jonge man (Riemann is 27 jaar) van een dergelijk moeilijk onderwerp zal maken. Gezien de uitlatingen van Gauss over de dissertatie van Riemann mogen we aannemen dat zijn verwach-

tingen hoog gespannen waren. Riemann heeft hem niet teleurgesteld, heeft zelfs zijn verwachtingen overtroffen. Wij zijn dan Gauss ook dankbaar voor zijn ongebruikelijke keuze.

In deze voordracht breekt Riemann met de gangbare opvatting omtrent de ruimte en ontwikkelt hij nieuwe ideeën, die zowel de meetkunde als de mathematische physica betreffen. Hij ontwikkelt namelijk de gedache, dat de beschrijving van zekere physische verschijnselen en hun onderlinge verhoudingen gezocht moet worden in de meetkunde van de ruimte, aldus mede de weg bereidende voor de latere relativiteitstheorie. Het spreekt vanzelf, dat een nadere uitwerking nodig is. Riemann geeft in zijn werk steeds grote lijnen aan, de details veelal terzijde latend. Zijn werk werpt een geheel nieuw licht op de meetkunde, die hij een taak toedenkt, die de bestaande meetkunde niet kan vervullen. Zijn overdenkingen worden wat de meetkunde betreft in een vorm gekristaliseerd, die nauw aansluit bij de analytische meetkunde van Descartes. Geheel in overeenstemming hiermede wordt een punt bepaald door een aantal getallen. Het nieuwe ligt echter hierin, dat Riemann voor de afstand van twee punten een veel algemenere uitdrukking kiest, die nog op verschillende manieren gevariëerd kan worden. Men beschikt daardoor niet over één ruimte, doch over vele ruimten, waarvan een deel wel, een ander deel niet realiseerbaar is in de zin van Poisson. Voor wie dit aanvaardt blijft wel niet veel anders over dan het puntbegrip te baseren op het getalbegrip, op de wijze, die we zoëven noemden.

Tot zover hebben wij vanaf Descartes uitsluitend gelet op de veranderingen in de houding ten opzichte van de grondbegrippen, die het gebruik van de analytische methode in de meetkunde heeft meegebracht. Dat wil echter niet zeggen, dat de verdere methode, de synthetische methode, geen nieuwe ideeën hieromtrent gebracht zou hebben. Het tegendeel is waar. Ook de resultaten door deze directe methode verkregen hebben het aanzien van de meetkunde gewijzigd. Enkele tijdgenoten van Descartes hielden zich bezig met die eigenschappen van vlakke figuren, die bewaard blijven als men deze figuren van een punt uit projecteert op een tweede vlak. Elke generatie ondergaat weer opnieuw de bekoring van de stelling, die de jeugdige Pascal de wiskunde heeft geschonken. Toch was het wachten nog op een Poncelet, die ongeveer twee eeuwen later door een systematisch onderzoek van de genoemde eigenschappen de projectieve meetkunde deed ontstaan. Ook hier ontmoeten wij weer een officier, ditmaal uit het leger van Napoleon, die met zijn voornaamste resultaten uit Russische krijgsgevangen-

schap terugkeert (1814, gepubliceerd 1822). Dit geschiedt juist in een tijd, waarin de strijd tussen de directe en analytische methode in de meetkunde zeer fel is. Stelde een van de leermeesters (Carnot) van Poncelet zich niet tot taak de meetkunde te bevrijden van de hieroglyphen van de algebra? Het werk van Poncelet versterkt het kamp van de aanhangers van de directe methode. De analytische meetkunde is dan nog niet in staat zijn resultaten op een even elegante manier af te leiden. De hiervoor benodigde algebraische hulpmiddelen ontbreken nog. Cayley is nauwelijks geboren (1821).

Een van de belangrijke ontdekkingen van Poncelet is het principe van de dualiteit. Het blijkt, dat men in de projectieve meetkunde naast elke stelling een andere kan plaatsen, die men uit de eerste verkrijgt door de begrippen punt en rechte te verwisselen. De meetkundige kan dus zijn stellingen uitspreken voor een tweetal soort objecten, die men wel moet onderscheiden, doch men mag geheel naar believen òf voor de eerste soort objecten punten lezen en de tweede soort rechten heten òf omgekeerd. Deze eigenschap heeft er toe medegewerkt, dat de mening ingang kon vinden, dat de meetkundige te maken heeft met abstracte objecten, waartussen zekere relaties bestaan, objecten, die verschillende realisaties toelaten.

Een van de ontdekkingen, die bij een beschouwing over de opvattingen van de grondbegrippen der meetkunde niet ongenoemd mag blijven, is die van de niet-Euclidische meetkunde daar deze een revolutie in het denken veroorzaakte, op zijn minst in het meetkundige denken. In zijn gevolgen niet ongelijk aan de ideeën van Copernicus ten aanzien van het zonnestelsel. Vondsten, waarvan de grootheid niet het minst wordt geaccentueerd door de eenvoudigheid van de betrokken theorieën.

Sedert Euclides worden in de synthetische meetkunde eigenschappen van figuren afgeleid uit enkele eenvoudige doch onbewezen stellingen, die men axioma's noemt. Bij de keuze van deze axioma's lieten de Grieken zich leiden door de onmiddellijke aanschouwing. Eén van deze axioma's luidt, dat men in een plat vlak door een punt buiten een rechte één en slechts één rechte kan trekken, die hoe ver ook verlengd de eerste niet snijdt. Nu is het duidelijk, dat al beschikte men in de ervaringsruimte over mathematische punten en rechten deze eigenschap niet geverifieerd zou kunnen worden, want men kan toch bezwaarlijk een lijn oneindig verlengen, zelfs in gedachten niet. Het is dan ook dit axioma, waarop de Russische wiskundige Lobatschewsky in het begin van de

19e eeuw de pijlen van zijn twijfel richt. Een gedurfde onderneming, als men bedenkt, dat het geloof in de betrouwbaarheid en de noodzakelijkheid van dit axioma door een 2000-jarig gebruik aanmerkelijk is versterkt. De eerste publicaties van Lobatschewsky blijven dan ook geruimen tijd onopgemerkt.

Het bovengenoemde parallellenpostulaat vervangt hij door een andere, dat hierop neerkomt, dat men in een plat vlak door een punt buiten een rechte meer dan één rechte kan trekken, die de eerste niet snijdt. Uit het zo verkregen axioma-stelsel leidt hij op de gewone manier allerlei eigenschappen van meetkundige figuren af, waarvan er begrijpelijkerwijze vele afwijken van de gebruikelijke stellingen, die berusten op de axioma's van Euclides. Steeds echter dreigt hem een gevaar, namelijk dat hij eens op een tegenspraak zal stuiten, met andere woorden, dat uit zijn grondstellingen zowel de geldigheid als de niet-geldigheid van een bepaalde eigenschap volgt. Bewijzen dat hij nooit op een contradictie zal stuiten zal hij niet kunnen om een reden, die veel overeenkomst vertoont met die waarop wij zoëven de onmogelijkheid van verificatie van het parallellenpostulaat afwezen. Hij kan slechts geloven, dat zijn meetkunde vrij van tegenspraak is. Een geloof, dat later versterkt wordt door het werk van Klein, waaruit namelijk blijkt, dat wat het gevaar voor contradicties betreft de nieuwe meetkunde op één lijn staat met de oudere, de Euclidische meetkunde.

Het is begrijpelijk, dat de belangstelling van de ontdekkers van de niet-euclidische meetkunde (we zouden bijna verzuimen naast Lobatschewsky nog de Hongaar Bolyai te noemen) ook uitgaat naar de definities van de meest elementaire meetkundige objecten, het punt, de rechte en het vlak. Enerzijds om een exacte fundering van de meetkunde te verkrijgen, anderzijds om te trachten door geschikte definities de moeilijkheden, die rondom het begrip „evenwijdig" zijn gerezen, uit de weg te ruimen.

Zowel Lobatschewsky als Bolyai beginnen de opbouw der meetkunde niet met het object punt, maar met het begrip „lichaam" en de relatie „aanraking", die in enkele postulaten nader omschreven wordt. Hiertoe behoort o.a. de mogelijkheid elk lichaam te splitsen in twee lichamen die elkaar aanraken. Men noemt dit het aanbrengen van een snede. Het simpele feit, uit de ervaring, dat men een ding, laten wij zeggen een appel door het aanbrengen van drie sneden (b.v. in onderling loodrechte vlakken) in acht delen kan verdelen, hebben zij door geschikte keus van hun postulaten ook laten gelden voor hun abstracte lichamen. Een dergelijk drietal sneden noemt men hoofdsneden. En het feit, dat van die acht stukjes

van de appel op hun oorspronkelijke plaats gelaten, sommige paren elkaar aanraken in een punt, sommige in een lijn en weer andere in een vlak inspireert hen tot hun definitie van punt, kromme en vlak. Wanneer men aldus Lobatschewsky alleen let op de aanraking en afziet van die delen van de acht lichamen, die een der andere lichamen niet raken, dan noemt men een tweetal van die lichamen een oppervlak, als ze ten opzichte van één der drie sneden tot verschillende delen behoren en een kromme of een punt al naar gelang ze t.o. van twee resp. drie sneden tot verschillende delen behoren. De definitie van *rechte* lijn wordt gegeven nadat eerst het begrip beweging is ingevoerd. De rechte wordt dan gedefinieerd als rotatieas van een beweging.

In deze opzet, waarvan wij slechts enkele gedachten konden noemen, is getracht uit te gaan van die begrippen en relaties, waarvan de invoering door de aanschouwing onmiddellijk gerechtvaardigd wordt, van de meest elementaire. Ook hedendaagse schrijvers volgen soms voor de opbouw van de meetkunde een methode, die geheel parallel loopt met die van Lobatschewsky en Bolyai, al onderscheidt men nu scherper tussen de gedefinieerde begrippen en de objecten der aanschouwing, die de aanleiding zijn tot het invoeren hiervan. Deze schrijvers kennen ten aanzien van de grondbegrippen twee problemen. Het gaat niet alleen om de vraag: „wat kan men met de ingevoerde begrippen doen" doch ook om de questie: „waar komen zij vandaan?" Ook de voorgeschiedenis, de psychologische voorgeschiedenis, van de axioma's en postulaten heeft hun belangstelling. Voor vele wiskundigen daarentegen behoort de laatste vraag niet meer tot de wiskunde en zij achten zich dan ook ontslagen van de eis de grondbegrippen en relaties zo in te voeren, dat het verband met datgene, waar ze vandaan komen, zo duidelijk mogelijk naar voren treedt. Men geeft er dan de voorkeur aan ze zo op te stellen, dat de draagwijdte van elk der axioma's afzonderlijk zo duidelijk mogelijk is.

Beschouwing van de reeds genoemde dualiteit in de projectieve meetkunde is mede de aanleiding geweest tot een verdere verandering in houding ten aanzien van de axiomatiek. Omdat in de grondstellingen van de projectieve meetkunde de begrippen punt en rechte verwisseld mogen worden, geldt dit voor alle hieruit voortvloeiende stellingen daar in het proces van het maken van gevolgtrekkingen de zin van de geometrische begrippen, voorzover deze niet in de axioma's is vastgelegd, geen rol speelt. Maar dat wil zeggen, dat deze zin in de gehele meetkunde geen rol speelt.

In het door Hilbert opgestelde axioma-stelsel ziet hij dan ook consequent van elke betekenis der ingevoerde begrippen af. Hij denkt zich drie verschillende systemen van dingen, die hij nog wel punten, rechten en vlakken noemt, doch waarbij hij beslist elke voorstelling afwijst. Hij kan ze dus ook net zo goed met voorhands betekenisloze symbolen aangeven. Verder denkt hij zich zekere relaties, die hij voor 't gemak ook met woorden aanduidt, waarvan de inhoud echter alleen bepaald wordt door de axioma's. Voor deze axioma's is men slechts aan één eis gebonden, die het een opsteller overigens lastig genoeg kan maken, namelijk de eis van de niet-strijdigheid. Zo zijn we dan ook in de synthetische meetkunde evenals in de analytische meetkunde aangeland bij een abstract puntbegrip, wat zeer bewust ontdaan is van elke verdere betekenis. De geometrische intuitie en aanschouwing is slechts een ladder, die men nodig had om op te klimmen, maar het gebouw steunt er niet op.

Meetkunde is vandaag aan de dag voornamelijk een questie van analyse en verzamelingenleer, waarin de oude terminologie van punt, kromme en vlak wordt gehandhaafd. Waarom eigenlijk? Het komt mij voor, dat hier meer achter zit dan alleen maar een gebrek aan fantasie. Het streven naar algemeenheid en verdere abstracties eigen aan de wiskunde zal steeds weer doen zoeken naar de algemene voorwaarden, waaronder bepaalde beweringen gelden. Evenals in het verleden zal dit ook in de toekomst gepaard gaan met een onophoudelijke omwerking van de gebruikte begrippen. Zo zal het ook gaan met de hier besproken begrippen. Het zijn deze vernieuwingen, waardoor de wiskunde steeds jong blijft.

OPLOSSING VAN HET VRAAGSTUK OP BLZ. 215

door

G. R. VELDKAMP.

1. Zijn △ ABC en △ PQR de bedoelde driehoeken en is H het centrum der collineatie, tevens hoogtepunt van △ ABC en zwaartepunt van △PQR, dan zal bij een vermenigvuldiging van △ PQR met H als centrum de richting der collineatie-as dezelfde blijven. Dit kan elementair zonder moeilijkheid worden aangetoond. Zie fig. 1 als een pyramide HABC met een snijdend vlak PQR; vermenigvuldigt men PQR t. o. van H, dan wordt zijn vlak evenwijdig verplaatst, dus ook de collineatie-as. Zonder schade aan de algemeenheid kan dan worden uitgegaan van het geval, dat Q samenvalt met B; zie fig. 2.

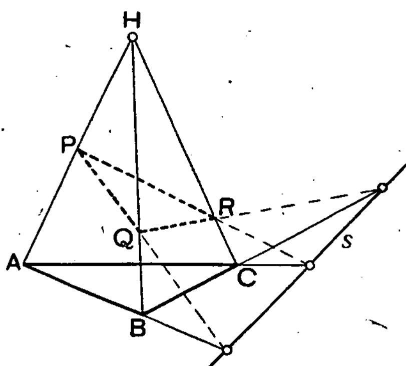


Fig. 1.

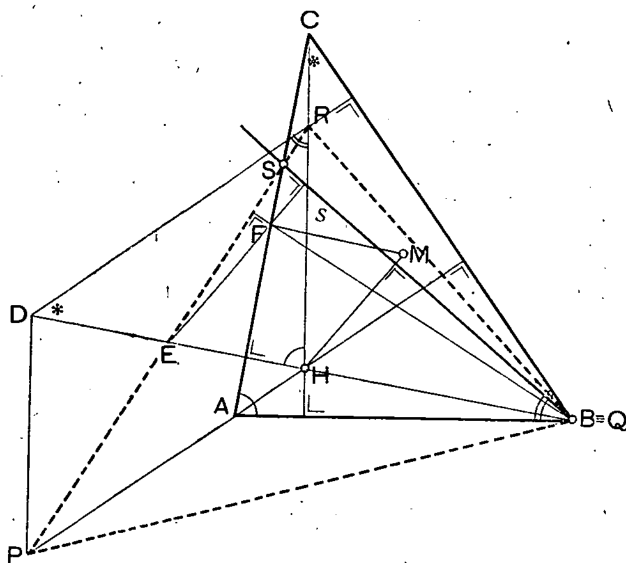


Fig. 2.

2. Om in dit geval △ PQR te vinden, komen wij uit de overweging, dat H zwaartepunt van die driehoek moet zijn tot de

volgende constructie. Verleng $\overline{BH}$ met $\overline{HD} = \overline{BH}$. Trek door D rechten opv. evenwijdig met AH en CH, die CH en AH opv. snijden in R en P. Dat H nu het zwaartepunt is van △ PQR zien we direct in. De zijden van △ ABC staan loodrecht op die van △ HRD. De gelijkstandige zwaartelijnen BF en RE van deze driehoeken staan dus ook loodrecht op elkaar. Is S het snijpunt van AC en PR, dan is dus F het hoogtepunt van △ BSE. Bijgevolg is EF ⊥ QS, waarin QS de as van collineatie is. Maar $\overline{MF} = \frac{1}{2}\overline{BH} = \overline{HE}$, als M het middelpunt van de omgeschreven cirkel van △ ABC is. Bovendien is MF // HE; dus is ook $\overline{EF}$ gelijk en evenwijdig $\overline{HM}$, zodat HM ⊥ QF is. q. e. d.

SUR DEUX TRIANGLES HOMOLOGIQUES,

par

M. R. DEAUX.

Nous allons montrer que la propriété démontrée par M. Kuipers (*Euclides,* 23e année, p. 214) découle, soit d'un théorème de Sondat (*Intermédiaire des mathématiciens,* 1894, p. 10), soit d'un théorème général permettant de déterminer la direction de l'axe d'une homologie plane dont le centre est à distance finie.

1. Si deux triangles coplanaires $T = ABC$, $T_1 = A_1B_1C_1$ sont tels que les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 concourent en un point O, les

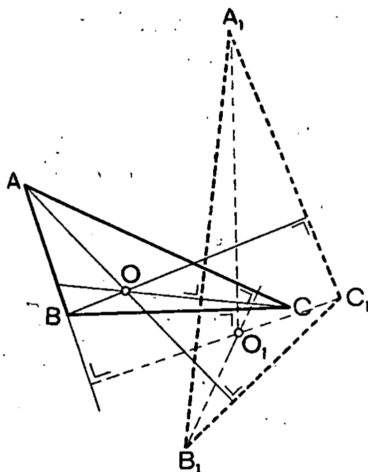


Fig. 1.

perpendiculaires menées de A_1, B_1, C_1 sur BC, CA, AB concourent aussi en un point O_1 (Molenbroek, 8e édition, p. 301, exercice 41). Les deux triangles sont dits *orthologiques;* O, O_1 sont leurs *centres d'orthologie.*

Il se peut, en outre, que T, T_1 se correspondent dans une homologie de centre S et d'axe *s*; on dit alors que les triangles sont *bilogiques.* Sondat (ainsi que Sollertinsky, *Intermédiaire des mathématiciens,* 1894, p. 44, et Fuhrmann, *Dissertation,* Koenigsberg, 1902) a démontré que les deux centres d'orthologie O, O_1 et le centre d'homologie S sont sur une même droite perpendiculaire à l'axe d'homologie *s*.

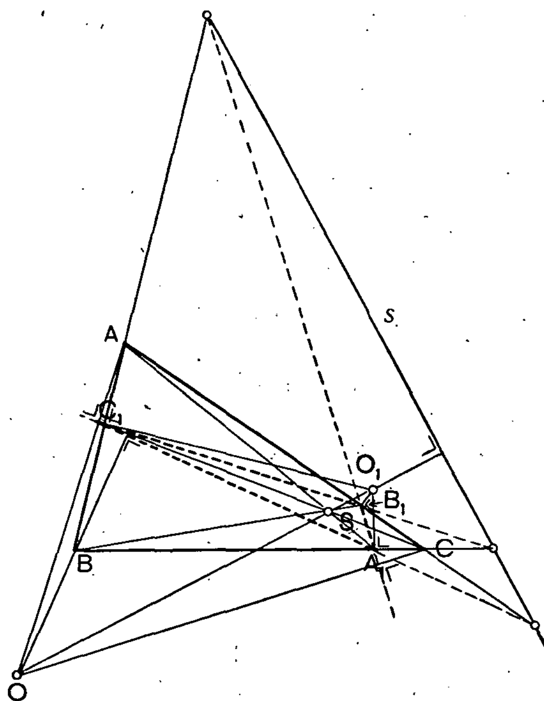


Fig. 2.

Supposons, comme le fait M. Kuipers, que T, T_1 se correspondent dans une homologie dont le centre S est à la fois l'orthocentre H de T et le centre de gravité de T_1. On a $O_1 = H$,

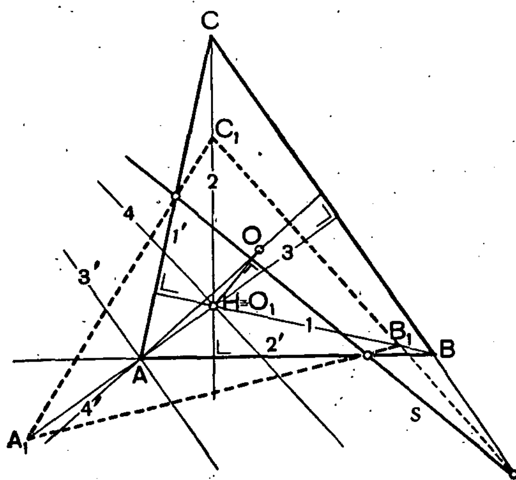


Fig. 3.

cherchons O. Puisque HA_1 est médiane de T_1, les droites HB_1, HC_1, HA_1 et la parallèle à B_1C_1 par H forment un quaterne harmonique; il en est donc de même de leurs perpendiculaires issues de A et qui sont AC, AB, la parallèle à BC, la droite AO. Celle-ci est dès lors médiane de T, le point O est par suite centre de gravité de T et, en vertu du théorème de Sondat, la droite d'Euler OH est perpendiculaire à l'axe d'homologie s de T, T_1.

La démonstration élémentaire de M. Kuipers (§§ 2, 3) est aussi basée sur la considération du point O (= Z, § 1).

2. Si l'on ignore le théorème de Sondat, on peut invoquer le suivant, que nous allons d'abord établir.

Lorsque deux triangles T, T_1 *sont homologiques pour un axe* s *et un centre* S *à distance finie, les parallèles menées par* S *aux*

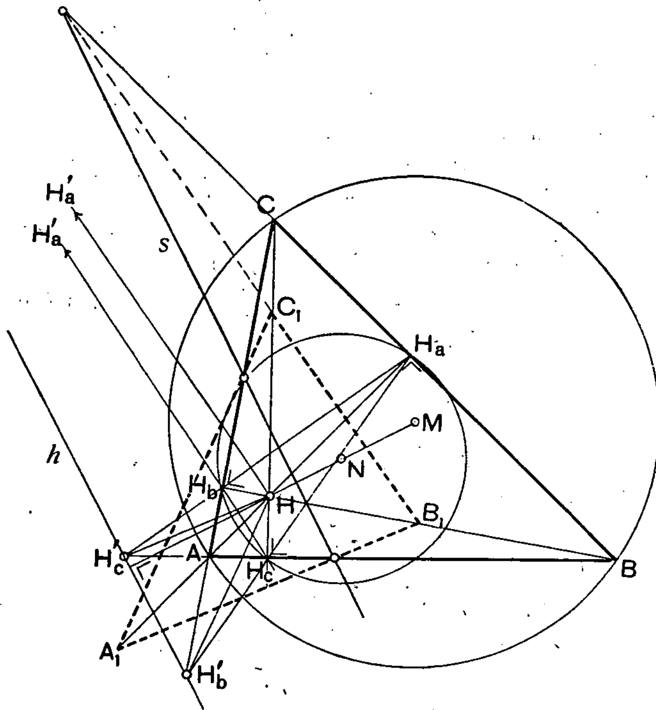


Fig. 4.

côtés de l'un rencontrent les côtés correspondants de l'autre en trois points situés sur une parallèle à s.

La droite s contient les points $\alpha = (BC, B_1C_1)$, $\beta = (CA, C_1A_1)$. Si, à T_1, on substitue son homothétique pour le centre S et un coefficient variable, les points α, β décrivent sur BC, CA deux

ponctuelles semblables ayant le point uni C, de sorte que la direction de $s = \alpha\beta$ est fixe. La position de s qui correspond au cas $A_1 = B_1 = C_1 = S$ joint les points de BC, CA, AB sur les parallèles menées par S aux côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 du T_1 variable, d'où le théorème annoncé.

Replaçons-nous dans le cas où S est l'orthocentre H de T et le centre de gravité de T_1. Soient H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs AH, BH, CH de T. Les points $H'_a = (BC, H_bH_c)$, $H'_b = (CA, H_cH_a)$, $H'_c = (AB, H_aH_b)$ sont sur une droite h qui, étant l'axe radical des cercles circonscrit et de Feuerbach du triangle T, est normale à la droite d'Euler de celui-ci. Comme on a

$$-1 = (BCH_aH'_a) = H(B_1C_1H_aH'_a),$$

les droites HH'_a, B_1C_1 sont parallèles, et il en est de même de HH'_b, C_1A_1 et de HH'_c, A_1B_1. En vertu du théorème établi ci-dessus, l'axe d'homologie s de T, T_1 est parallèle à h, ce qu'il fallait établir.

On remarquera que h est la droite DEF (*fig.* 2) de M. Kuipers.

Notons aussi que *les parallèles menées par* H *aux tangentes en* A, B, C *au cercle circonscrit à T rencontrent respectivement les côtés* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *de* T_1 *en trois points d'une droite parallèle à l'axe d'homologie des triangles* T_1, $H_aH_bH_c$, car les côtés de ce dernier sont parallèles aux tangentes considérées.

Faculté polytechnique de Mons, 3 juin 1948.

KORRELS.

LXXXVII.

In *Euclides*, de lopende jaargang, onder Verscheidenheden XIX, blz. 117, heeft Prof. Bottema de vraag gesteld *of er een driehoek bestaat, waarvoor de uiteinden der buitenbissectrices de hoekpunten zijn van een voetpuntsdriehoek.*

Deze vraag moet ontkennend beantwoord worden, zoals uit het hieronder volgende tweetal oplossingen blijkt.

Oplossing van C. W. Dornseiffen (Den Helder).

Noemen we de uiteinden der buitenbissectrices op de verlengden der zijden BC, CA en AB achtereenvolgens P_1, P_2 en P_3, dan is de vraag naar de mogelijkheid, dat $P_1 P_2 P_3$ een voetpuntsdriehoek is, te schrijven als het onderzoek naar de mogelijkheid van de betrekking:

$$AP_3^2 + BP_1^2 + CP_2^2 = AP_2^2 + BP_3^2 + CP_1^2 \quad . \quad . \quad (1)$$

Anders geschreven

$$\sum (AP_3^2 - BP_3^2) = \sum \left\{ \frac{b^2c^2}{(a-b)^2} - \frac{a^2c^2}{(a-b)^2} \right\} = \sum \frac{c^2(b+a)}{(b-a)} = 0 \quad (2)$$

Vermenigvuldigen we deze betrekking met $(b - a)$ $(c - b)$ $(a - c)$, dan voeren we de oplossingen $a = b$, $b = c$ of $c = a$ eventueel in.

De betrekking luidt dan

$$\Sigma c^2(a + b)(b - c)(c - a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Uitgeschreven luidt dit:

$$\begin{aligned} &- a^4b - a^4c + a^3b^2 + 2a^3bc + a^3c^2 + a^2b^3 - 2a^2b^2c \\ &\quad - 2a^2bc^2 + a^2c^3 - ab^4 + 2ab^3c - 2ab^2c^2 + 2abc^3 \\ &\quad - ac^4 - b^4c + b^3c^2 + b^2c^3 - bc^4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4) \end{aligned}$$

Nu bestaan steeds de volgende identiteiten:

1°. $(s - a)(s - b)(s - c) = r^2s$, dus

$$\begin{aligned} &(a + b - c)(a - b + c)(- a + b + c) = 8r^2s \text{ of} \\ &- a^3 + a^2b + a^2c + ab^2 - 2abc + ac^2 \\ &\qquad - b^3 + b^2c + bc^2 - c^3 = 8r^2s \quad . \quad (5) \end{aligned}$$

2°. $ab + ac + bc = r^2 + s^2 + 4rR$ . . . . (6)

3°. $abc = 4rRs$ . . . . (7)

Vermenigvuldiging van (5) en (6) levert op:

$$\begin{aligned} 8r^2s(r^2 + s^2 + 4rR) = &- a^4b - a^4c + a^3b^2 + a^3bc + \\ &+ a^3c^2 + a^2b^3 + a^2c^3 - ab^4 + ab^3c + abc^3 \\ &- ac^4 - b^4c + b^3c^2 + b^2c^3 - bc^4 \quad . \quad (8) \end{aligned}$$

zodat (4) te schrijven is als:

$$8r^2s(r^2 + s^2 + 4rR) + a^3bc - 2a^2b^2c - 2a^2bc^2 +$$
$$+ ab^3c - 2ab^2c^2 + abc^3 = 0 \quad \text{of}$$
$$8r^2s(r^2 + s^2 + 4rR) + 4rRs(a^2 - 2ab - 2ac$$
$$+ b^2 - 2bc + c^2) = 0$$
$$8r^2s(r^2 + s^2 + 4rR) + 4rRs\{4s^2 - 4(r^2 + s^2 + 4rR)\} = 0.$$

Verdergaande vereenvoudiging geeft:

$$4rs\,[2r(r^2 + s^2 + 4rR) + R(-4r^2 - 16rR)] = 0$$

delen door $4rs \neq 0$

$$2r^3 + 2rs^2 + 8r^2R - 4r^2R - 16rR^2 = 0 \quad \text{delen door } 2r \neq 0$$
$$r^2 + s^2 + 2rR - 8R^2 = 0 \quad \text{of:}$$
$$(r + R)^2 + s^2 = (3R)^2 \quad \text{of} \quad s^2 = (2R - r)(4R + r) \quad . \quad . \quad (9)$$

Invullen voor $s = R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ en voor $r = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$ geeft:

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 =$$
$$\left(2 - 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(4 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right), \text{ en daar}$$
$$4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1,$$

wordt deze betrekking:

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 = \{3 - (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\} \times$$
$$\{3 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\}.$$

$$\left.\begin{array}{r}\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + 2\sin\alpha\sin\gamma + \sin^2\beta + \\ 2\sin\beta\sin\gamma + \sin^2\gamma + \\ + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + 2\cos\alpha\cos\gamma + \cos^2\beta + \\ 2\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma\end{array}\right\} = 9 \quad (10)$$

$$\sum 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 6 \quad \text{of uiteindelijk:}$$

$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) = 3} \quad . \quad . \quad (11)$$

Hieraan kan alléén voldaan worden als $\alpha = \beta = \gamma$, dus $a = b = c$.

Deze oplossing hebben we in 't begin ingevoerd; aangezien bij de gelijkzijdige driehoek de punten P_1, P_2 en P_3 op de wijklijn liggen, is de driehoek $P_1P_2P_3$ trouwens tevens ontaard.

Voor het probleem bestaat dus géén reële oplossing.

Oplossing van H. J. C. A. Nunnink (Delft).

Voert men driehoekscoördinaten x_1, x_2, x_3 in met de gegeven driehoek ABC tot gronddriehoek en het middelpunt van de ingeschreven cirkel als eenheidspunt, dan zijn de coördinaten van het

hoogtepunt H: $\frac{1}{\cos\alpha}, \frac{1}{\cos\beta}, \frac{1}{\cos\gamma}$ en de vergelijking van de oneigenlijke rechte is $x_1 . \sin\alpha + x_2 . \sin\beta + x_3 . \sin\gamma = 0$. De snijpunten van de buitenbissectrices uit A, B en C met de overstaande zijden zijn $P_1(1, -1, 0)$, $P_2(1, 0, -1)$ en $P_3(1, -1, 0)$. De loodlijn in P_1 op BC gaat met AH en de oneigenlijke rechte door één punt. Hieruit volgt, dat de vergelijking van deze loodlijn is

$$(\cos\beta + \cos\gamma)x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Overeenkomstige uitdrukkingen vindt men voor de loodlijn in P_2 op CA en in P_3 op AB. De drie loodlijnen gaan door één punt als

$$\begin{vmatrix} \cos\beta + \cos\gamma & 1 & 1 \\ 1 & \cos\gamma + \cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & \cos\alpha + \cos\beta \end{vmatrix} = 0$$

Na enige herleiding volgt hieruit

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha . \sin \tfrac{1}{2}\beta . \sin \tfrac{1}{2}\gamma \times$$
$$. [1 - \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) . \cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) . \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)] = 0.$$

De laatste factor is alleen gelijk aan nul als $\alpha = \beta = \gamma$. Daar voor een gelijkzijdige driehoek de punten P_1, P_2 en P_3 niet in het eindige liggen, volgt hieruit: *in een driehoek kunnen de uiteinden der buitenbissectrices niet de hoekpunten zijn van een voetpuntsdriehoek.*

Twee aanvullingen.

LXXXVIII.

1. In de artikels over de gelijke buitenbissectrices (Euclides 23, No. 1 blz. 8, No. 3 blz. 128) mis ik een *verklaring* van 't uitzonderlijk gedrag van de genoemde lijnen in vergelijking met de binnenbissectrices.

Alleen ingeval ∠ C de grootste of de kleinste van de hoeken van △ ABC is, kan men de *gelijkheid* van twee buitenbissectrices definiëren, n.l. in 't eerste geval (∠ C de grootste ∠) is de lengte van de buitenbiss. van ∠ A 't lijnstuk, begrepen tussen A en 't verlengde van BC, en overeenkomstig daarmee voor B 't lijnstuk tussen B en 't verlengde van AC. In 't tweede geval (∠ C de kleinste ∠) moeten we hierboven lezen: 't verlengde van CB, resp. dat van CA; dan kunnen die lijnstukken onderling gelijk gesteld worden, omdat men beide als negatief kan opvatten.

Is echter ∠ C tussen de twee andere hoeken begrepen, dan kunnen de lijnstukken alleen tegengesteld gelijk genoemd worden. M.a.w.

we hebben hier te doen met 't vraagstuk: wat volgt uit de gelijkheid van de *kwadraten* van de buitenbiss.-lijnstukken:

$$\alpha^2 = \beta^2 ?$$

Naar behoren heeft deze vraag twee oplossingen: 1^0^. $\alpha = \beta$, d.i. de gelijkbenige $\triangle$; 2^0^. $\alpha = -\beta$, d.i. een $\triangle$ zoals die van Emmerich.

Ook de trigonometrie levert formules, die alleen voor de kwadraten algemeen geldig zijn, zoals

$$a^2 = \frac{4R^2 \sin^2 B \sin^2 C}{\sin^2 {}^1/_2(C - B)}.$$

2. Tot mijn spijt moet ik hier een illusie verstoren van niemand minder dan Prof. Bottema (Euclides 23, No. 1 blz. 5).

De driehoeken ABD en ABE hebben twee paar gelijke zijden en 'n gelijk verschil van twee hoeken, nl.:

$$\angle ADB - \angle BAD = \angle AEB - \angle ABE \; (= \angle C).$$

De congruentie wordt aangetoond op de gebruikelijke manier, doordat we de driehoeken *tegen elkaar aan* leggen (BE op DA), waardoor 'n verschil van hoeken omgezet wordt in een som, hier 'n stompe hoek nl. $90^\circ + \frac{1}{2}C$, want (zie boven) b.v.

$$\angle ADB + \angle ABE = \angle ADB + \angle DBE = \angle AGB = 90^\circ + \tfrac{1}{2}C.$$

Voor gelijke buitenbissectrices kan dit bewijs herhaald worden, ingeval $\angle C$ de grootste hoek is (zie 1. boven). In 't geval, dat $\angle C$ de kleinste hoek is zijn de gelijke hoeken BAF en FDB scherp, nl. $90^\circ - \frac{1}{2}C$, maar men heeft $AB \gtrless FD < AF = AE$ en $< BD$, wat de congruentie waarborgt. Dit verschillend gedrag vindt zijn verklaring hierin: in 't eerste geval neemt (zie de formule voor a^2 onder 1.)

$$\frac{\sin B}{\sin {}^1/_2(C - B)}$$

monotoon toe met de scherpe $\angle B$ ($< \angle C$), wat niet geldt voor

$$\frac{\sin B}{\sin {}^1/_2(B - C)}, \; \angle B > \angle C.$$

L CRIJNS.

Over Pythagoras-getallen.

LXXXIX.

I. Als in $a^2 + b^2 = c^2$ a, b en c positief, gehele en onderling ondeelbare getallen zijn, noemen we a, b en c elementaire Pythagoras-getallen.

1e. a en b kunnen dus niet beide even zijn.

2e. a en b kunnen ook niet beide oneven zijn, want als

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

23e JAARGANG 1948

P. NOORDHOFF N.V. – GRONINGEN

$a = 2n + 1$ $\quad b = 2m + 1$ is $\left\{ \begin{array}{l} a^2 = 4n^2 + 4n + 1 \\ b^2 = 4m^2 + 4m + 1 \end{array} \right.$ dus

$c^2 =$ 4 voud $+ 2$, wat onmogelijk een kwadraat kan zijn. Dus een der getallen a en b is even en het andere oneven. *c is dus altijd oneven.* Stel a oneven, dus $a = 2n + 1$ en $c = 2k + 1$, dan is $b^2 = (2k + 1)^2 - (2n + 1)^2 = 4k^2 + 4k - 4n^2 - 4n$ of $b^2 = 4\{k(k + 1) - n(n + 1)\}$. De beide producten tussen { } zijn even en daar de { } vorm een kwadraat moet zijn is ze deelbaar door 4, waaruit volgt, dat b^2 deelbaar is door 16, dus *b is een 4-voud.*

II. Stel $\quad c = a + p$ . . . . (1)

dan is $b^2 = c^2 - a^2 = (a + p)^2 - a^2$,

dus $\quad b^2 = (2a + p)p$ . . . . (2)

a en p kunnen geen factor gemeen hebben, want dan had volgens (1) c deze factor ook en volgens (2) b eveneens en dan hadden we geen elementaire P-getallen.

Daar $2a$ (a is oneven!) slechts één factor 2 bevat, volgt hieruit in verband met (2) dat p een oneven aantal factoren 2 moet bevatten, anders is $(2a + p)p$ geen kwadraat. Dus p zowel als $(2a + p)$ zijn beide het 2-voud van een kwadraat. We stellen daarom:

$p = 2v^2$ . . . . (3)

$2a + p = 2u^2$ . . . . (4)

Hieruit volgt: $\quad a = u^2 - v^2$ . . . . (5)

Daar a oneven is, moet een der getallen u en v even zijn en het andere oneven, of: *$u - v$ is oneven.*

Substitutie van (3) en (4) in (2) geeft:

$b = 2uv$ . . . . (6)

Evenzo van (3) en (5) in (1)

$c = u^2 + v^2$ . . . . (7)

Voor een willekeurig stel elementaire P-getallen geldt dus:

$\left. \begin{array}{l} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ c = u^2 + v^2 \end{array} \right\}$ waarin: $\left\{ \begin{array}{l} a \text{ oneven} \\ b \text{ een 4-voud} \\ c \text{ oneven} \end{array} \right.$ en $\left\{ \begin{array}{l} u > v \\ u \text{ en } v \text{ onderling ond.} \\ u - v \text{ oneven} \end{array} \right.$

Voor de P-getallen vindt men dan:

$u = 2$	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	
$v = 1$	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6	1	3	5	7	
$a = 3$	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13	63	55	39	15	enz.
$b = 4$	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84	16	48	80	112	
$c = 5$	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85	65	73	89	113	

Stellingen.

1. Eén der P-getallen is een *3-voud.*

Bewijs:

Als u of v een drievoud is, is b het ook. Als geen van beide door 3 deelbaar zijn kan men stellen:

$$\left.\begin{aligned} u &= 3k \pm 1 \\ v &= 3l \pm 1 \end{aligned}\right\} \text{ dus } \begin{aligned} u^2 &= 9k^2 \pm 6k + 1 \\ v^2 &= 9l^2 \pm 6l + 1 \end{aligned}$$

$$\overline{} \text{ af}$$

$$u^2 - v^2 = \text{ drievoud}$$

dus a is een 3-voud.

Opmerking. c kan geen 3-voud zijn.

2. Eén der P-getallen is een *4-voud.* $b = 2uv$ en u of v is even. (Dit is boven ook reeds bewezen.)

3. Eén der P-getallen is een *5-voud.*

Bewijs:

Als u of v een 5-voud is, is b het ook. Als ze geen van beiden door 5 deelbaar zijn kunnen we stellen:

$$u = 5k \pm 1 \quad \text{of} \quad u = 5k \pm 2$$

$$\text{en} \quad v = 5l \pm 1 \quad \text{of} \quad v = 5l \pm 2$$

dus $A.\ u^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$ of $B.\ u^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$

$C.\ v^2 = 25l^2 \pm 10l + 1$ of $D.\ v^2 = 25l^2 \pm 20l + 4$

De combinaties AC en BD geven $u^2 - v^2 = 5$ voud,

dus a is een 5-voud.

De combinaties AD en BC geven $u^2 + v^2 = 5$ voud,

dus c is een 5-voud.

III. Men kan ook stellen:

$$c = b + q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

dan is $a^2 = c^2 - b^2 = (b + q)^2 - b^2$

dus

$$a^2 = (2b + q)q \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Evenals a en p in II kunnen b en q geen factor gemeen hebben. Daar a oneven is moeten q en $(2b + q)$ in (9) beide oneven kwadraten zijn. We stellen daarom

$$q = r^2 \quad \ldots \quad (10) \quad r \text{ is oneven}$$

$$2b + q = s^2 \quad \ldots \quad (11) \quad s \text{ is oneven}$$

Hieruit volgt: $b = \frac{1}{2}(s^2 - r^2) \quad . \quad (12)$

Substitutie van (10) en (11) in (9) geeft

$$a = r \cdot s \quad \ldots \quad (13)$$

Evenzo van (10) en (12) in (8)

$$c = \tfrac{1}{2}(s^2 + r^2) \quad . \quad (14)$$

Voor een willekeurig stel elementaire P-getallen geldt dus:

$$a = r \cdot s \quad b = \tfrac{1}{2}(s^2 - r^2) \quad c = \tfrac{1}{2}(s^2 + r^2) \quad \text{waarin:} \left\{ \begin{array}{l} a \text{ oneven} \\ b \text{ een 4-voud} \\ c \text{ oneven} \end{array} \right. \text{ en } \begin{array}{l} r \text{ en } s \text{ oneven} \\ r \text{ en } s \text{ ond. ond.} \\ s > r \end{array}$$

Voor de P-getallen vindt men dan:

$s = 3$	5	5	7	7	7	9	9	9	11	11	11	11	11
$r = 1$	1	3	1	3	5	1	5	7	1	3	5	7	9
$a = 3$	5	15	7	21	35	9	45	63	11	33	55	77	99
$b = 4$	12	8	24	20	12	40	28	16	60	56	48	36	20
$c = 5$	13	17	25	29	37	41	53	65	61	65	73	85	101

Voor dezelfde a, b en c bestaan tussen u, v en r, s de betrekkingen

$$\left. \begin{array}{l} s = u + v \\ r = u - v \end{array} \right\}$$

Om te bewijzen dat één der P-getallen een 3-voud is moet men stellen als r of s geen 3-voud is:

$$\left. \begin{array}{l} s = 3(2k + 1) \pm 2 \\ r = 3(2l + 1) \pm 2 \end{array} \right\}$$

omdat r en s beide oneven zijn.

Evenzo voor het geval dat r en s geen 5-voud zijn:

$$\left. \begin{array}{l} s = 5(2k + 1) \pm 2 \\ r = 5(2l + 1) \pm 2 \end{array} \right\} \quad \text{of} \quad \left. \begin{array}{l} s = 5(2k + 1) \pm 4 \\ r = 5(2l + 1) \pm 4 \end{array} \right\}$$

De bewijzen verlopen dan, als bij geval II.

F. BROUWER.

INHOUD VAN DE 23e JAARGANG 1947/48.

Korrels.

Ingevolge papiertoewijzing B.P.P. No. 573 verschijnt deze uitgave zes maal per jaar en is de omvang van dit Nummer 48 pag's., formaat 16 × 24½ cm.